UVOD U ALGEBARSKU TOPOLOGIJU

Šime Ungar
http://www.mathos.unios.hr/~sime/

Literatura:

J. Gallier, D. Xu. *A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces*, Springer-Verlag, 2013.
http://www.cis.upenn.edu/~jean/surfclass-n.pdf (1. poglavlje)

W. S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer, 1991.

Allen Hatcher. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
http://www.math.cornell.edu/˜hatcher/AT/ATpage.html

James R. Munkres. *Topology. Second Edition*, Prentice Hall, 2000.

Š. Ungar. *Metrički prostori*,
http://www.mathos.unios.hr/~sime/HR/metricki/sve.pdf

25. svibnja 2016.

Strukture, ekvivalencije, klasifikacije

- Skup s nekom strukturom
  - uređen skup $(A, <)$
  - Abelova grupa $(G, +)$
  - realni vektorski prostor
  - topološki prostor $(X, \mathcal{T})$
- ekvivalencije i klase ekvivalencije
  - sukladnost trokutova u ravnini poučci o sukladnosti: SSS, SKS, KSK
  - vektori u ravnini dijagonale se raspolavljaju
  - racionalni brojevi $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$
  - izomorfizam vektorskih prostora: $\mathcal{M}_{mn} \cong \mathbb{R}^{mn}$ dimenzija*
  - homeomorfizam topoloških prostora to je mnogo teže
- klasifikacija

*Samo za konačnodimenzionalne vektorske prostore.

Ekvivalentnost topoloških prostora

Osnovno problemi u topologiji su ustanoviti jesu li dva topološka prostora ekvivalentna — može li se jedan bez trganja i/ili lijepljenja deformirati u drugi, tj. jesu li oni ***homeomorfni*** ili nisu, klasificirati pojedine klase topoloških prostora, te prepoznati topološki prostor na osnovu nekih podataka o njemu.

Naprimjer, ravnina $\mathbb{E}^2$ je topološki različita od prostora $\mathbb{R}$ realnih brojeva, i oba su prostora različita od euklidskog prostora $\mathbb{E}^3$.
Ali kako to dokazati?

Ako se iz $\mathbb{R}$ izvadi jedna točka ostatak više nije povezan — raspada se na dva komada, dok ako se točka izvadi iz $\mathbb{E}^2$ ili iz $\mathbb{E}^3$, ostatak ostaje povezan. Dakle, $\mathbb{R}$ nije homeomorfan niti prostoru $\mathbb{E}^2$ niti $\mathbb{E}^3$.

Da $\mathbb{E}^2$ i $\mathbb{E}^3$ nisu međusobno homeomorfni — mnogo je teže dokazati.

Primjeri homeomorfnih i nehomeomorfnih prostora

Promotrimo klase homeomorfnih i nehomeomorfnih slova u (ovom fontu):

- **A R**
- **B**
- **C G I J L M N S U V Z**
- **Č Ć LJ NJ Š Ž**
- **D O**
- **Đ**
- **DŽ**
- **E F T**
- **H K**
- **P**

Sva slova u istom redu su međusobno homeomorfna,
i nehomeomorfna svim slovima iz ostalih redova. ZAŠTO?

Čime se bavi algebarska topologija ?

U algebarskoj topologiji se topološkim prostorima pridružuju izvjesne ***invarijante***, prvenstveno algebarske: brojevi, grupe, prsteni, ili još složenije algebarske strukture.

Ukoliko je neka od invarijanata za dva prostora različita (neizomorfna) onda ta dva prostora nisu homeomorfna.

Obratan zaključak najčešće ne vrijedi.

Mi ćemo se u ovom kolegiju baviti klasifikacijom ploha, i pritom upoznati neke tehnike i neke osnovne algebarske invarijante topoloških prostora.

Što ćemo u kolegiju obraditi

1. KLASIFIKACIJASKI TEOREM — NEFORMALNO
2. PLOHE
3. TRIANGULACIJA
4. FUNDAMENTALNA GRUPA I ORIJENTABILNOST
5. HOMOLOŠKE GRUPE
6. KLASIFIKACIJSKI TEOREM ZA KOMPAKTNE PLOHE

1. KLASIFIKACIJASKI TEOREM — NEFORMALNO
   - Problem kojim ćemo se baviti
   - Neformalni dokaz klasifikacijskog teorema

Opis problema

Želimo definirati što smatramo ekvivalentnošću dviju ploha, i sačiniti potpunu listu reprezentanata klasa ekvivalencije, tako da svaki reprezentant ima eksplicitan opis, tzv. *normalnu formu*.

Klasifikacijski teorem za kompaktne plohe kaže da se plohe, iako se pojavljuju u najrazličitijim oblicima, mogu klasificirati, tj. da je svaka kompaktna ploha ekvivalentna jednoj i samo jednoj *reprezentantnoj* plohi, tj. plohi u normalnoj formi
(to otprilike odgovara činjenici da je svaki racionalan broj reprezentiran jedinstvenim do kraja skraćenim razlomkom).

Za preciziranje navedene tvrdnje, potrebno je točno definirati:

- što su plohe,
- što znači da su dvije plohe ekvivalentne,
- što su normalne forme ploha.

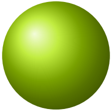
Neformalno o prva dva pitanja

- Preciznu definiciju plohe dat ćemo u §4, a zasada ćemo ***plohom*** zvati topološki prostor koji je lokalno homeomorfan *euklidskoj ravnini*, tj. prostor koji oko svake točke ima okolinu koja je homeomorfna otvorenom krugu u ravnini, i koji je povezan.
- Nadalje, dvije plohe smatramo ***ekvivalentnima*** ako među njima postoji *homeomorfizam*, tj. neprekidna bijekcija čiji je inverz također neprekidan; dakle, ako su one *homeomorfne*.
- Što je *normalna forma* objasnit ćemo kasnije.

Primjeri nekih orijentabilnih ploha

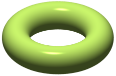
Različite plohe:

sfera



$g = 0$

torus

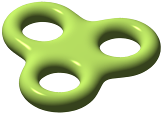


$g = 1$

torus s dvije rupe

$g = 2$

torus s tri rupe

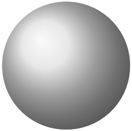


$g = 3$

Orijentabilna ploha roda (genusa): $g = 0$, $g = 1$, $g = 2$, $g = 3$

Plohe ekvivalentne sferi:

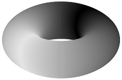
$\cong$



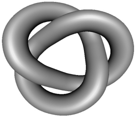
$\cong$

Plohe ekvivalentne torusu:

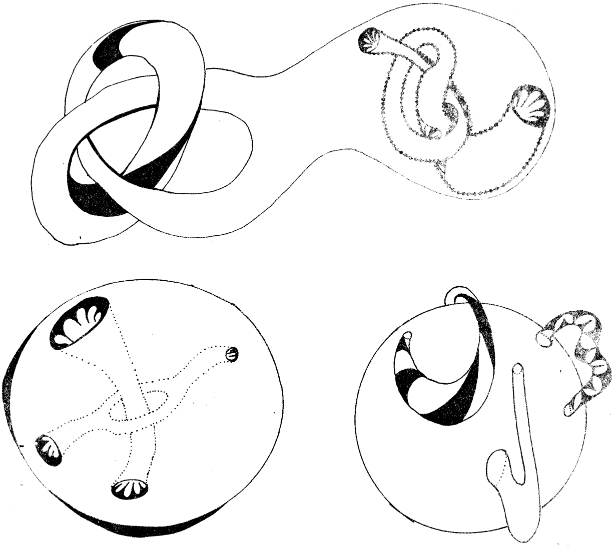
$\cong$



$\cong$



A ovo?



O dokazu

Dokaz klasifikacijskog teorema odvija se u dvije etape:

- *Topološki dio* sastoji se u tome da se dokaže kako se svaka kompaktna ploha *može triangulirati*;
- *Kombinatorni dio* sastoji se u tome da se dokaže kako se svaka triangulirana kompaktna ploha može, pomoću izvjesnog skupa od konačno mnogo transformacija, u konačno mnogo koraka transformirati u normalnu formu.

Intuitivno, plohu je moguće triangulirati ako je ona homeomorfna topološkom prostoru koji možemo sastaviti lijepljenjem trokutova duž njihovih bridova (stranica). To ćemo precizno napraviti definirajući 2-dimenzionalne komplekse u trećem poglavlju.

Prvi dokaz da je svaka ploha triangulabilna dao je 1925. Radó. Dokaz je prilično dugačak, kompliciran i ne-intuitivan.

O kombinatornom koraku

Postoji više načina da se riješi kombinatorni dio. Jednom, kada se uvjerimo u to kako se triangulirana ploha može razrezati tako da se može *izravnati* i položiti u ravninu, onda je prilično intuitivno kako se ona može dovesti u normalnu formu. Ipak, detalji su prilično mukotrpni. Detaljan dokaz napravit ćemo u šestom poglavlju, a neformalan ćemo prikaz vidjeti u § 2.

Različite normalne forme ploha moguće je razlikovati pomoću dvije jednostavne invarijante:

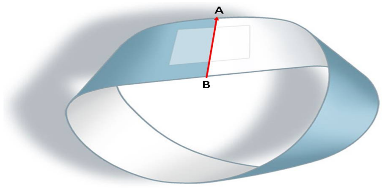
- *orijentabilnosti*, i
- *Euler–Poincaréove karakteristike* — cijelog broja koji označava broj „rupa” u plohi.

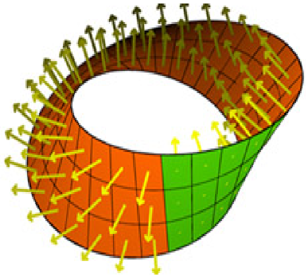
Nažalost, nije jednostavno precizno definirati orijentabilnost ploha, niti dokazati topološku invarijantnost Euler–Poincaréove karakteristike.

Orijentabilne i neorijentabilne plohe

Sve plohe na stranici 9 su orijentabilne.

Najjednostavniji primjer neorijentabilne plohe je *Möbiusova traka*:

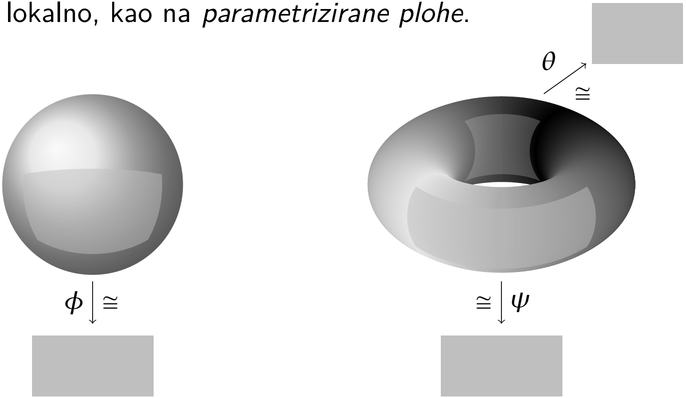




Napomena: Möbiusova traka je takozvana *ploha s rubom* (svaka točka ima okolinu homeomorfnu nekom otvorenom skupu u poluravnini $\{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : y \geqslant 0\}$). Mi takve plohe uglavnom nećemo promatrati, pa kao primjer neorijentabilne plohe navodimo Möbiusovu traku jer se niti jedna neorijentabilna ploha bez ruba ne može smjestiti u $\mathbb{E}^3$, pa ju ne možemo niti jednostavno prikazati.

Globalni pogled na plohe

Prije Riemannovih radova sredinom 19. stoljeća, na plohe se gledalo lokalno, kao na *parametrizirane plohe*.



Istom su oko 1930. Alexander i Whitney na plohe počelo gledati kao na topološke prostore koji su lokalno homeomorfni euklidskoj ravnini (iako je takve ideje imao već i Weyl oko 1913.).

„Peglanje"

Nakon Riemanna su se Listig, Möbius i Jordan počeli baviti topološkim svojstvima (kompaktnih) ploha, na koje su gledali kao da su napravljene od elastičnog, vrlo rastezljivog materijala. Dvije plohe smatrane su ekvivalentnima ako se jedna može neprekidno preslikati na drugu bez „kidanja i lijepljenja" (i uzimali su „zdravo za gotovo" da se svaka ploha može triangulirati).

Möbius i Jordan su prvi shvatili kako je glavni problem naći, po mogućnosti numeričke, invarijante, koje bi odlučivale o ekvivalenciji odnosno ne-ekvivalenciji dviju ploha.

Ključna činjenica koja omogućuje klasifikaciju kompaktnih ploha je da se *svaka (povezana) kompaktna triangulabilna ploha može, rezanjem duž pogodno odabranih krivulja, „otvoriti" i rastegnuti tako da se položi u ravninu kao jedan povezan komad*. Naprimjer, sferu možemo razrezati duž jednog meridijana (pola neke glavne kružnice), i rastezanjem „izravnati", „ispeglati".

Ispeglana ploha kao ćelijski kompleks

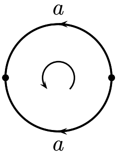
Ispeglanu plohu možemo podijeliti na nekoliko (konveksnih) poligona, koje nazivamo *ćelijama*, eventualno sa zakrivljenim bridovima (stranicama), a bridove tih ćelija obilježimo oznakama pridruženim krivuljama po kojima smo plohu bili razrezali kako bi ju ispeglali. Svaka se oznaka pojavljuje dvaput, na jednoj ili na dvije različite ćelije.

Razmatrajući obratno, svaka se kompaktna ploha može dobiti od skupa (konveksnih) poligona (s eventualno zakrivljenim rubovima) lijepljenjem parova odgovarajućih bridova.
Takvi se skupovi ćelija koji predstavljaju plohe nazivaju *ćelijski kompleksi*.

Štoviše, može se pokazati kako se krivulje duž kojih se vrši rezanje plohe, mogu odabrati tako da sve prolaze istom točkom, pa je svaku kompaktnu plohu moguće dobiti od jedne ćelije, tj. od jednog konveksnog poligona, s parnim brojem bridova, i čiji svi vrhovi odgovaraju jednoj jedinoj točki na plohi.

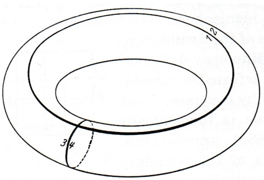
Sfera i torus kao ćelijski kompleksi

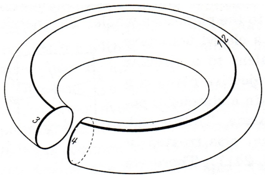
Ćelija s dvije obilježene stranice, predstavlja sferu

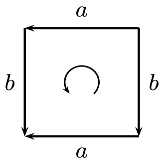


$a\,a^{-1}$

Torus

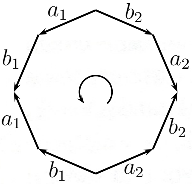




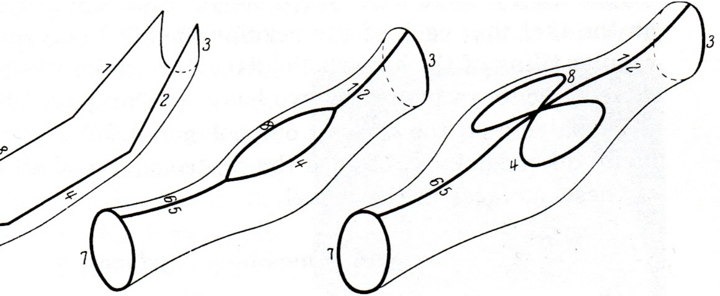


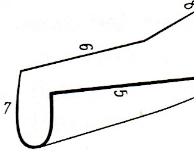
$a\,b\,a^{-1}b^{-1}$

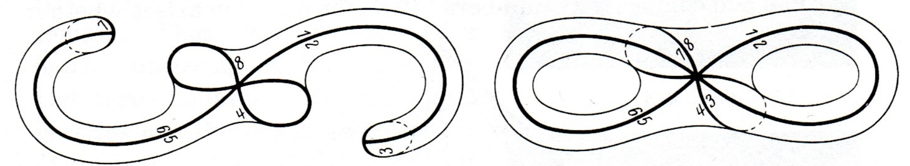
Orijentabilna ploha roda 2 (torus s dvije rupe)



$a_1 = 8,\ b_1 = 6,\ a_1^{-1} = 7,\ b_1^{-1} = 5,\ a_2 = 4,\ b_2 = 2,\ a_2^{-1} = 3,\ b_2^{-1} = 1$







Plohe tipa (I)

Dakle, torus s 2 rupe, tj. orijentabilna ploha roda 2, može se reprezentirati kao osmerokut s 4 para sparenih bridova.

Slično se orijentabilna ploha roda 3 reprezentira dvanaesterokutom sa 6 pari sparenih bridova, i općenito, orijentabilna ploha roda g reprezentirana je $4g$-terokutom s $2g$ pari sparenih bridova.

Rub ovog pravilnog $4g$-terokuta je oblika

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \tag{I}$$

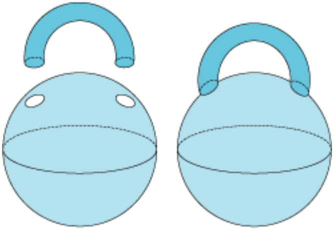
i to ćemo zvati *normalnom formom* tipa (I).

Sfera je orijentabilna ploha roda 0, i reprezentirana je jednom ćelijom s rubom $aa^{-1} = \epsilon$ (prazan izraz).

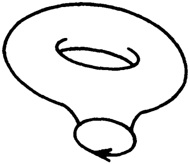
Ručke

„Modul" oblika $aba^{-1}b^{-1}$ nazivamo ***ručka***, i geometrijski predstavlja

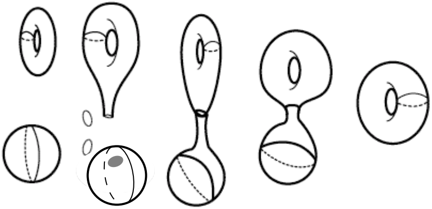
lijepljenje cijevi



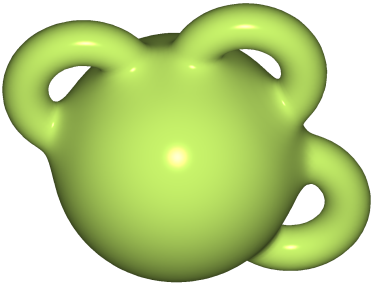
ili, ekvivalentno, *spoj* s torusom.



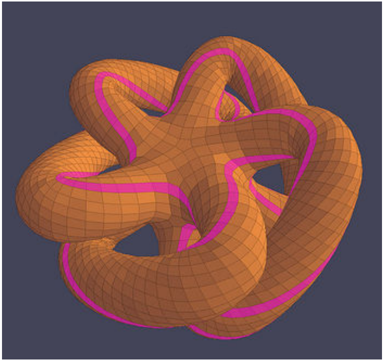
Spoj dviju ploha dobije se tako da se iz svake plohe izvadi po jedan otvoren disk, te se takve plohe s „rupom" zalijepe duž dobivenih kružnica.



Sfere s ručkama



Sfera s 3 ručke
(orijentabilna ploha roda 3)



Sfera s 5 ručki
(orijentabilna ploha roda 5)

Orijentirane ćelije i bridovi

Ključni korak u dokazu klasifikacijskog teorema je pokazati kako se svaka triangulirana kompaktna ploha može, koristeći jednostavne transformacije rezanja i lijepljenja, dovesti u *normalan oblik* reprezentiran pravilnim poligonom s $4g$ bridova u orijentabilnom, i $2g$ bridova u neorijentabilnom slučaju, gdje je g *rod* (*genus*) plohe.

Kako je ploha već triangulirana, možemo smatrati da je dana konačnim skupom S ravninskih poligona (ćelija) sa zakrivljenim bridovima. Označimo s B skup bridova svih tih ćelija. Svakoj ćeliji $\sigma \in S$ pridružen je rub $\partial\sigma$, na koji gledamo kao na konačan niz orijentiranih bridova. Praktično je uvesti oznake B^{-1} za skup suprotno orijentiranih bridova, i S^{-1} za skup suprotno orijentiranih ćelija σ^{-1}, pa imamo funkciju $\partial\colon S \cup S^{-1} \to B \cup B^{-1}$, definiranu s $\partial(\sigma) := a_1 a_2 \ldots a_n$ i $\partial(\sigma^{-1}) := a_n^{-1} \ldots a_2^{-1} a_1^{-1}$, $a_j \in B \cup B^{-1}$.

Također, ne razlikujemo rubove dobivene cikličkom zamjenom bridova.

Ćelijski kompleksi

Svaki konačan skup ćelija koji predstavlja neku plohu zadovoljava sljedeća dva uvjeta:

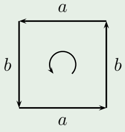
(K1) Svaki se orijentirani brid $a \in B \cup B^{-1}$ pojavljuje dvaput u skupu rubova (bilo kao a ili a^{-1}).
Specijalno ako se pojavljuje dvaput u rubu neke ćelije, onda se ne pojavljuje u rubu niti jedne druge ćelije.

(K2) Skup ćelija je *povezan*, tj. nije unija dvaju disjunktnih skupova ćelija koji zadovoljavaju (K1).

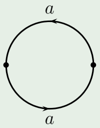
Konačan skup ćelija, s pridruživanjem rubova, koji zadovoljava uvjete (K1) i (K2) nazivat ćemo ***ćelijskim kompleksom***.

Projektivna ravnina

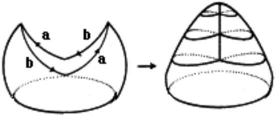
Primjer 2.1 (Projektivna ravnina)

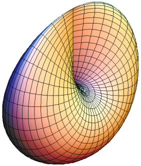


abab



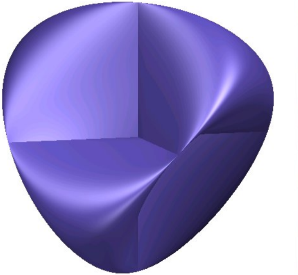
aa





cross-cap (ukrštena kapa)

(jedna imerzija projektivne ravnine u $\mathbb{E}^3$)

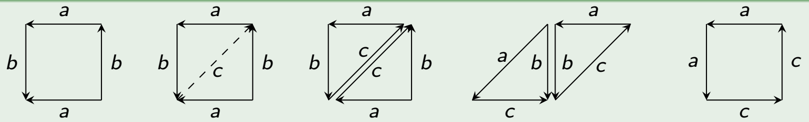


Steinerova ploha

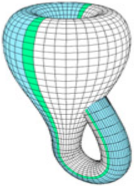
(još jedna imerzija projektivne ravnine u $\mathbb{E}^3$)

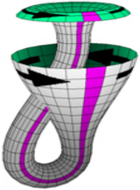
Kleinova boca

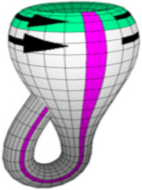
Primjer 2.2 (Kleinova boca)

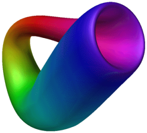


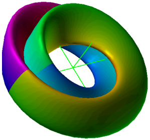
$aba^{-1}b$ $\qquad$ $aacc$











Kleinova boca
kao unija dviju Möbiusovih vrpci

Orijentabilnost ćelijskih kompleksa

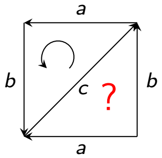
Intuitivno je jasno što znači orijentabilnost plohe.
Ali definirati orijentabilnost ćelijskog kompleksa, tako da on reprezentira orijentabilnu plohu, malo je delikatnije.

Orijentacija ćelijskog kompleksa $K = (S, B, \partial)$ je svaki skup (izbor) ćelija $\{A^\varepsilon : A \in S\}$, gdje je A^ε ili A ili A^{-1}, za sve $A \in S$.

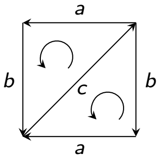
Za orijentaciju kažemo da je *koherentna* ako se svaki brid $a \in B \cup B^{-1}$ pojavljuje ***točno jednom*** u skupu rubova svih ćelija orijentacije $\{A^\varepsilon : A \in S\}$.

Konačno, ćelijski kompleks je ***orijentabilan*** ako ima neku koherentnu orijentaciju.

neorijentabilan
ćelijski kompleks
(Kleinova boca)



orijentabilan
ćelijski kompleks
(torus)



Plohe tipa (II)

U šestom ćemo poglavlju pokazati kako se sve neorijentabilne plohe roda $g \geqslant 1$ mogu reprezentirati $2g$-terokutom s rubom oblika

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_g a_g \tag{II}$$

što nazivamo *normalnom formom* tipa (II).

„Modul" aa naziva se ***cross-cap*** (***ukrštena kapa***) i geometrijski predstavlja zamjenu jednog diska Möbiusovom trakom, ili, ekvivalentno, spoj s projektivnom ravninom.

Primjer: Kleinova boca je ekvivalentna sferi s dvije ukrštene kape, tj. spoju dviju projektivnih ravnina (vidi sliku u donjem desnom uglu na stranici 25).

Normalne forme ćelijskih kompleksa

Dakle, postoje dvije vrste ***normalnih formi*** ćelijskih kompleksa. Takvi ćelijski kompleksi $K = (S, B, \partial)$ imaju jednu ćeliju, $S = \{A\}$, a skup bridova i rub ćelije A su ili

(I) $B = \{a_1, a_2, \dots, a_g, b_1, b_2, \dots, b_g\}$ i

$$\partial(A) = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

gdje je $g \geqslant 0$, ili je

(II) $B = \{a_1, a_2, \dots, a_g\}$ i

$$\partial(A) = a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_g$$

pri čemu je $g \geqslant 1$.

Kanonski kompleksi tipa (I) su orijentabilni, a tipa (II) su neorijentabilni.

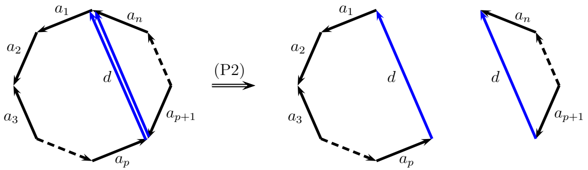
Kombinatorni oblik klasifikacijskog teorema

Teorem 2.3

Svaki se ćelijski kompleks može konačnim nizom transformacija (P2) *i njezinih inverza, prevesti u normalni oblik.*

Transformacija (P2) sastoji se u tome da se ćelijski kompleks K zamijeni ćelijskim kompleksom K' koji se dobije *elementarnom subdivizijom* primjenom sljedeće operacije:

(P2) Jedna se ćelija A kompleksa K s rubom $\partial A = a_1 \cdots a_j a_{j+1} \cdots a_n$ zamijeni s dvije ćelije A' i A'' kompleksa K' s rubovima $a_1 \cdots a_j d$ i $d a_{j+1} \cdots a_n$, gdje je d brid u K' koji nije u K.
Odgovarajuća zamjena napravi se i za A^{-1}.

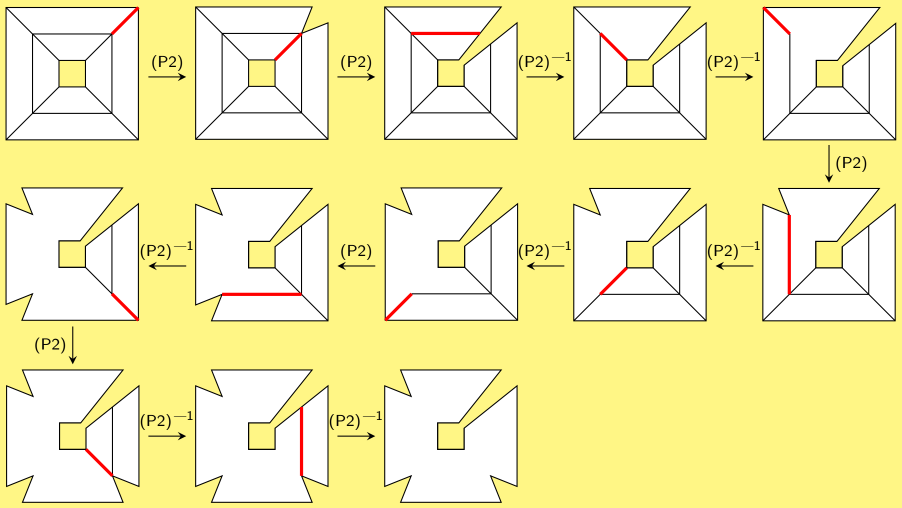


Inverz se sastoji u tome da se dva jednako označena brida zalijepe, poštujući orijentaciju i dobiveni „brid” izbriše (ukloni).

Skica dokaza teorema 2.3

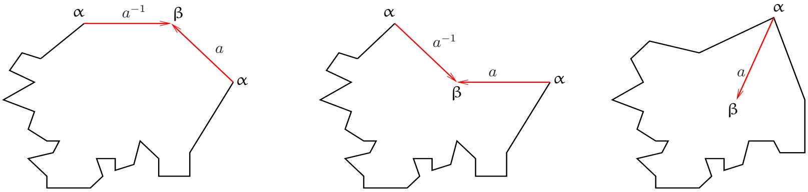
Dokaz provodimo u nekoliko koraka.

1. korak: Redukcija na jednu ćeliju.



2. korak: eliminacija izraza oblika aa^{-1} u rubu

Ovaj korak je jednostavan — sve se vidi iz sljedećeg crteža:



Ovaj postupak ponavljamo sve dok ne eliminiramo sve izraze oblika aa^{-1}. Ukoliko smo time eliminirali sve bridove, dobiveni ćelijski kompleks je tipa (I), i predstavlja sferu.

Vrhovi ćelijskog kompleksa

Jasno je što je *vrh* u triangulaciji plohe. Ali vrh na plohi se može pojaviti na više mjesta kao vrh pripadnog ćelijskog kompleksa.

Definicija: Ako se izraz ab pojavljuje u rubu neke ćelije onda kažemo da brid b *slijedi* brid a, ili da je b *sljedbenik* od a.

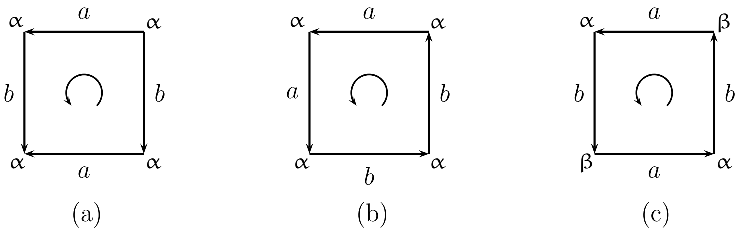
Intuitivno, vrh je niz „ulazećih" bridova. Točnije,

Vrh je svaka ciklički uređena n-torka koja zadovoljava jedan od uvjeta:

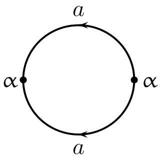
- Jednočlan niz $\alpha = (a)$ je *vrh* ako se aa^{-1} pojavljuje u rubu neke ćelije (pa se a, zbog (K1) u definiciji ćelijskog kompleksa na stranici 23, ne pojavljuje nigdje drugdje).
- Par $\alpha = (a, b)$, $a \neq b$, je *vrh* ako je ili $b = a^{-1}$ i postoji ćelija kojoj je rub aa, ili je $b \neq a^{-1}$ i ab^{-1} se pojavljuje dvaput u skupu rubova.
- n-torka $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$, $n \geqslant 3$, je *vrh* ako se svaki a_j pojavljuje dvaput u skupu rubova, sljedbenik svakog a_j se nalazi u α, i oba a_{j-1}^{-1} i a_{j+1}^{-1} su sljedbenici od a_j.

Smatramo da n-torke $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(a_n, \ldots, a_2, a_1)$ reprezentiraju isti vrh.

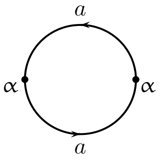
Primjeri vrhova



Kompleks (a) ima jedan vrh $\alpha = (a, b^{-1}, a^{-1}, b)$.
Kompleks (b) ima jedan vrh $\alpha = (a, b^{-1}, b, a^{-1})$.
Kompleks (c) ima dva vrha $\alpha = (a, b^{-1})$ i $\beta = (a^{-1}, b)$.



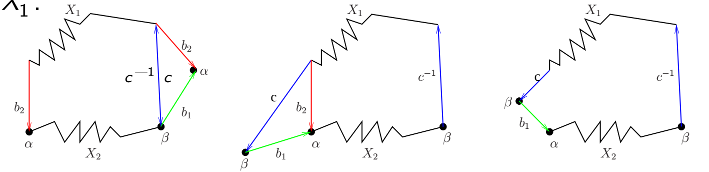
$\alpha = (a)$



$\alpha = (a^{-1}, a)$

3. korak: redukcija vrhova

Izraza oblika aa^{-1} više nema, i cilj je dobiti ćelijski kompleks sa samo jednim vrhom.
Neka je $\alpha = (b_1, \ldots, b_m)$, $m \geqslant 2$ (inače bi $b_1 b_1^{-1}$ bilo u rubu). Ako α nije jedini vrh, postoji još neki vrh, β, i BSO pretpostavimo da je b_1 brid od β do α. Uočimo u rubu izraz $b_1 b_2^{-1}$. Rub je oblika $b_1 b_2^{-1} X_1$, pa transformacijom (P2) dobivamo dva ćelijska kompleksa s rubovima $b_1 b_2^{-1} c$ i $c^{-1} X_1$.

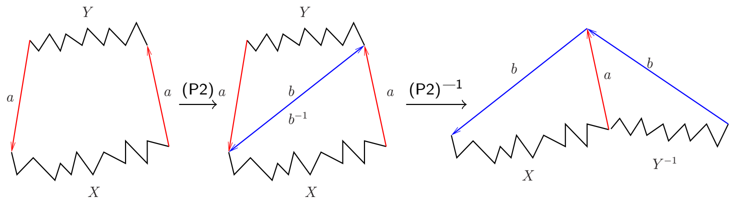


Uočimo b_2 u rubu, koji neka je oblika $X_1 b_2 X_2$. Kako je $b_2 \neq b_1, b_1^{-1}, c, c^{-1}$, možemo b_2 eliminirati transformacijom $(\mathrm{P2})^{-1}$. Time smo „premjestivši" trokut $cb_1 b_2^{-1}$, u rubu smanjili broj vrhova označenih α i jedan više označen β.

To ponavljamo tako dugo dok ne ostane $\alpha = (b_1)$, tj. u rubu se pojavi $b_1^{-1} b_1$. Tada primjenom 1. koraka eliminiramo b_1, a time i vrh α.

4. korak: uvođenje ukrštenih kapa (cross-caps)

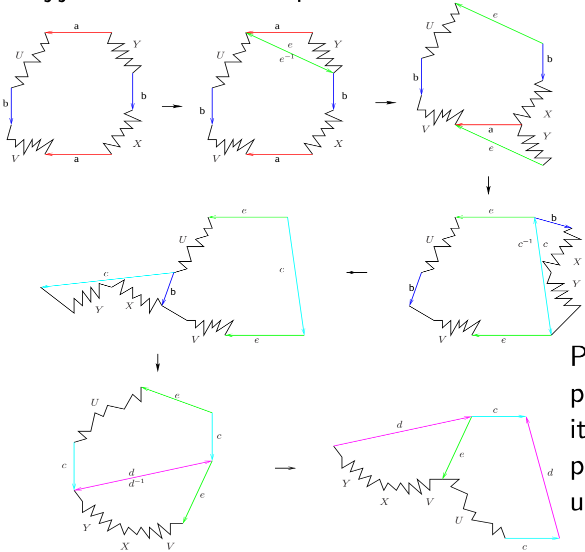
Ako se u rubu brid a pojavljuje dvaput, tj. ako je rub oblika $aXaY$, $X, Y \neq \epsilon$ (ako se pojavi izraz aa to ne diramo — to već je jedan cross-cap i njega ostavimo), onda postupamo slično kao pri redukciji vrhova.



Tako smo dobili cross-cap bb. Ponavljajući taj postupak, svako dvostruko pojavljivanje (s istom orijentacijom) nekog brida u rubu rezultira jednom ukrštenom kapom.

5. korak: uvođenje ručki

Cilj je konvertirati rub tipa $aUbVa^{-1}Xb^{-1}Y$ u rub tipa $cdc^{-1}d^{-1}YXVU$.



Primijetimo da ovaj postupak, i njegove iteracije, čuvaju već postojeće ručke i ukrštene kape (cross-caps).

Jesmo li gotovi?

Ako u rubu nema niti jedan cross-cap, dobili smo normalnu formu tipa (I), pa smo gotovi.

Ako u rubu ima barem jedan cross-cap i nema ručki, dobili smo normalnu formu tipa (II), pa smo i u tom slučaju gotovi.

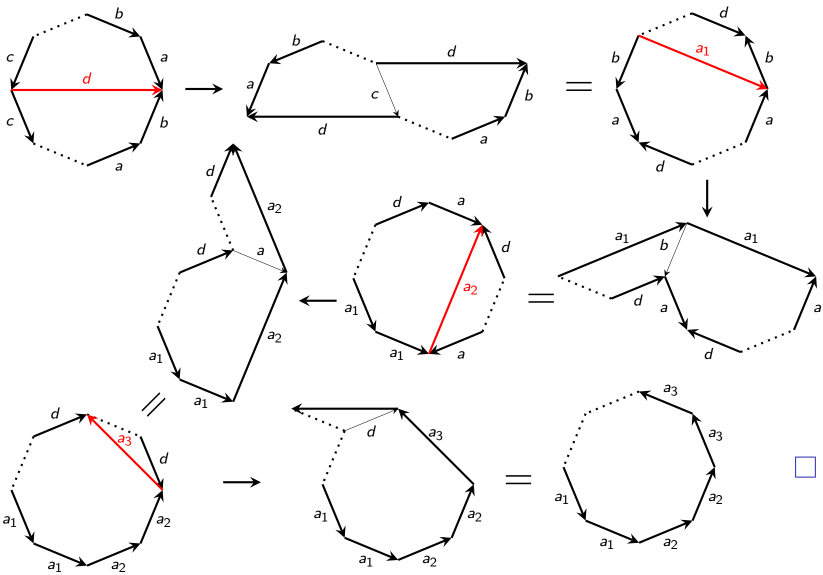
A što ako u rubu imamo barem jedan cross-cap i barem jednu ručku?

To nije normalna forma niti tipa (I) niti tipa (II), a jasno je da takav ćelijski kompleks predstavlja neorijentabilnu plohu.

Pokazat ćemo kako se u tom slučaju jedna ručka i jedan cross-cap mogu zamijeniti s tri cross-capa.

Ponavljanjem tog postupka nestaju ručke a ostaju samo ukrštene kape, pa dobivamo normalnu formu tipa (II). Time će teorem 2.3 biti dokazan.

6. korak: transformacija ručke i cross-capa u 3 cross-capa



Što dalje ?

Teorem 2.3, čiji smo dokaz upravo prikazali, pokazuje kako se svaki ćelijski kompleks koji reprezentira plohu (kompaktnu, povezanu i bez ruba), može dovesti u normalnu formu.

Sljedeći korak je pokazati kako različite normalne forme predstavljaju različite, tj. nehomeomorfne plohe.

- Prvo, pokazuje se kako transformacije (P2) i $(P2)^{-1}$ korištene pri redukciji ćelijskog kompleksa na normalnu formu, čuvaju orijentabilnost, ili neorijentabilnost.
- Drugo, ako su dvije plohe homeomorfne, onda su ili obje orijentabilne ili su obje neorijentabilne, ali problem je kako precizno definirati orijentabilnost plohe. Time ćemo se baviti u četvrtom poglavlju.

Klasifikacijski teorem za kompaktne plohe

- Treće, svakoj ćemo plohi pridijeliti numeričku invarijantu — Euler–Poincaréovu karakteristiku.

  Za trianguliranu plohu K označimo s n_0 broj vrhova, s n_1 broj bridova, i s n_2 broj trokutova. Tada se ***Euler–Poincaréova karakteristika*** definira kao

$$\chi(K) := n_0 - n_1 + n_2.$$

  Treba pokazati da Euler–Poincaréova karakteristika ne ovisi o triangulaciji plohe, da homeomorfne plohe imaju istu Euler–Poincaréovu karakteristiku, i da različite normalne forme istog tipa orijentabilnosti, imaju različite Euler–Poincaréove karakteristike.

  Sve to zajedno onda dokazuje sljedeći klasifikacijski teorem:

Teorem 2.4 (Klasifikacijski teorem za kompaktne plohe)

Dvije kompaktne plohe su homeomorfne ako i samo ako su istog tipa orijentabilnosti i imaju jednake Euler–Poincaréove karakteristike.

2 PLOHE

- Kvocijentna topologija
- Plohe

Priprema

Trebat će nam neke osnovne stvari iz topologije:

- topološki prostor; otvoreni i zatvoreni skupovi
- baza topologije i aksiomi prebrojivosti
- neprekidno preslikavanje
- Hausdorffovo svojstvo
- kompaktnost
  - kompaktan Hausdorffov je normalan
  - X, Y metrički, $f\colon X \to Y$ neprekidno, X kompaktan $\Rightarrow f$ uniformno neprekidno
  - X metrički, $A, B \subseteq X$ zatvoreni, A kompaktan $\Rightarrow \big(d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset\big)$
- povezanost
- povezanost putevima i lukovima

Kvocijentna topologija

Na plohe gledamo kao na prostore dobivene identificiranjem (lijepljenjem) bridova u rubu ravninskih poligona. Kako bismo to lijepljenje precizno opisali, potrebna nam je kvocijentna topologija.

Definicija 3.1

Neka je X topološki prostor, Y neki skup, i $f\colon X \to Y$ surjektivna funkcija. ***Kvocijentna topologija*** na Y definirana funkcijom f se definira tako da skup $V \subseteq Y$ proglasimo otvorenim ako i samo ako je njegova praslika $f^{-1}(V)$ otvoren skup u X.

Primijetimo da ako Y ima kvocijentnu topologiju s obzirom na surjekciju $f\colon X \to Y$, onda je f neprekidno preslikavanje.

Napomena: *Funkcija* i *preslikavanje* zapravo znače isto. Međutim, kao što je uobičajeno, mi ćemo preslikavanje uvijek smatrati neprekidnim. Dakle kada kažemo da je $f\colon X \to Y$ funkcija, to znači da ili X i/ili Y nisu topološki prostori, pa pojam neprekidnosti nema smisla, ili f nije neprekidna, ili ne znamo ili nije važno je li f neprekidna.

Kvocijentni prostor i kvocijentno preslikavanje

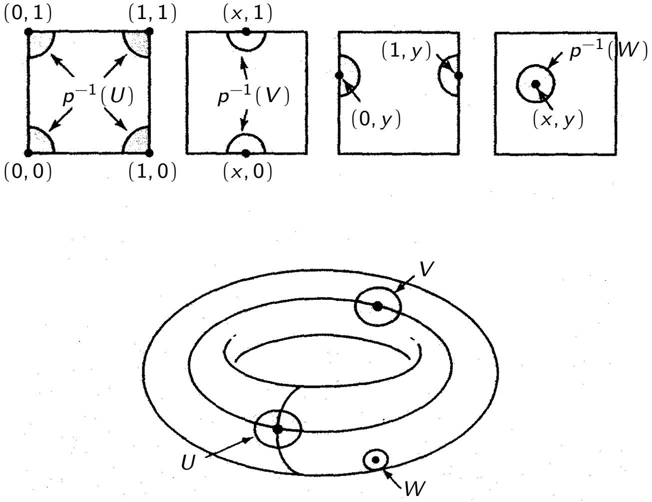
Definicija 3.2

Neka je $\sim$ neka relacija ekvivalencije na topološkom prostoru X, $p\colon X \to X/\!\sim$ projekcija koja svakom $x \in X$ pridružuje njegovu klasu ekvivalencije $[x] \in X/\!\sim$, te neka je skup $X/\!\sim$ snabdjeven kvocijentnom topologijom s obzirom na projekciju p. Tada kažemo da je $X/\!\sim$ ***kvocijentni prostor*** od X po relaciji $\sim$, a za $p\colon X \to X/\!\sim$ kažemo da je ***kvocijentno*** ili ***identifikacijsko preslikavanje***.

Dakle, skup $V \subseteq X/\!\sim$ je otvoren ako, i samo ako je njegov original $p^{-1}(V)$ otvoren podskup u X.

Ekvivalentno, skup $G \subseteq X/\!\sim$ je zatvoren ako, i samo ako je $p^{-1}(G)$ zatvoren podskup u X.

Torus kao kvocijentni prostor



Otvorena i zatvorena preslikavanja

Ako je $f\colon X \to Y$ neprekidna surjekcija to *ne mora* značiti da Y ima kvocijentnu topologiju s obzirom na f, tj. skup $V \subseteq Y$ ne mora biti otvoren ako je $f^{-1}(V)$ otvoren u X (iako bismo mi to često željeli). Ipak, u dva važna slučaja to će biti tako.

Definicija 3.3

Neka su X i Y topološki prostori. Za funkciju $f\colon X \to Y$ kažemo da je ***otvorena*** ako je za svaki otvoren skup $U \subseteq X$, njegova slika $f(U)$ otvoren skup u Y. Analogno se definiraju ***zatvorene funkcije***.

Svojstva otvorena, zatvorena i neprekidna su međusobno sasvim nezavisna. Nikoja dva ne impliciraju treće. Međutim, iako je običaj preslikavanjem nazivati samo neprekidne funkcije, u literaturi su uobičajeni nazivi *otvoreno preslikavanje* i *zatvoreno preslikavanje* i kada se radi o samo otvorenoj odnosno zatvorenoj funkciji.

Svojstva koja kvocijentna preslikavanja čuvaju

Vrijedi sljedeća činjenica koju je lako dokazati:

Ako je $f\colon X \to Y$ surjektivno otvoreno ili zatvoreno neprekidno preslikavanje, onda Y ima kvocijentnu topologiju s obzirom na f, tj. f je kvocijentno preslikavanje. (Obrat ne vrijedi, tj. kvocijentno preslikavanje ne mora biti niti otvoreno niti zatvoreno.)

Među poželjnim svojstvima koja bismo željeli da kvocijentna preslikavanja čuvaju, su kompaktnost, povezanost, putevna povezanost i Hausdorffovo svojstvo. Kako su kvocijentna preslikavanja neprekidna, ona čuvaju prva tri od navedenih svojstava. Ali Hausdorffovo svojstvo općenito nije sačuvano.

Ipak, sačuvano je u nekim posebnim, ali važnim slučajevima.

Dovoljan uvjet za Hausdorffovo svojstvo kvocijenta

Teorem 3.4

Neka je X kompaktan Hausdorffov prostor, a $f\colon X \to Y$ zatvorena neprekidna surjekcija. Tada je i prostor Y Hausdorffov.

Dokaz: Za svaki $y \in Y$ je jednočlan skup $\{y\}$ zatvoren.

Zaista, f je surjekcija, pa postoji $x \in X$ t.d. je $y = f(x)$, tj. $\{y\} = f(\{x\})$. Ali X je Hausdorffov prostor, pa je jednočlan skup $\{x\}$ zatvoren, a jer je f zatvoreno preslikavanje, skup $\{y\} = f(\{x\})$ je zatvoren u Y.

Neka su $a, b \in Y$ dvije različite točke. Tada su $f^{-1}(a) = f^{-1}(\{a\})$ i $f^{-1}(b) = f^{-1}(\{b\})$ disjunktni zatvoreni skupovi u X, koji je, kao kompaktan Hausdorffov prostor, normalan. Stoga postoje disjunktni otvoreni skupovi $U, V \subseteq X$ t.d. $U \supseteq f^{-1}(a)$ i $V \supseteq f^{-1}(b)$.

Njihovi komplementi su zatvoreni, a kako je f zatvoreno preslikavanje, $f(X \setminus U)$ i $f(X \setminus V)$ su zatvoreni podskupovi od Y. Dakle, $W_a := Y \setminus f(X \setminus U)$ i $W_b := Y \setminus f(X \setminus V)$ su otvoreni skupovi u Y.

(nastavak) ☞

Završetak dokaza

Tvrdimo da su skupovi W_a i W_b disjunktni i da sadrže točke a odnosno b.

Pretpostavimo da $\exists y \in W_a \cap W_b = \big(Y \setminus f(X \setminus U)\big) \cap \big(Y \setminus f(X \setminus V)\big)$.
Tada $y \notin f(X \setminus U)$, pa je $f^{-1}(y) \cap (X \setminus U) = \emptyset$, tj. $f^{-1}(y) \subseteq U$.
Analogno se, zbog $y \in W_b$, pokazuje da je $f^{-1}(y) \subseteq V$.
Kako je $U \cap V = \emptyset$, zaključujemo da je i $f^{-1}(y) = \emptyset$, što ne može biti jer je f surjekcija. Dakle, W_a i W_b su disjunktni.

Ostaje pokazati da je $a \in W_a$ i $b \in W_b$.
Pretpostavimo da $a \notin W_a$. Tada je $a \in Y \setminus W_a = f(X \setminus U)$, pa je $f^{-1}(a) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$, što je u kontradikciji s $f^{-1}(a) \subseteq U$.
Analogno se pokazuje kako je $b \in W_b$, što dokazuje teorem. $\square$

Napomena: Pretpostavka da je f *zatvorena* surjekcija, u prethodnom se teoremu ne može zamijeniti pretpostavkom da je f *otvorena surjekcija*.

Definicija plohe

Grubo rečeno, ploha je topološki prostor koji se može pokriti otvorenim skupovima koji su homeomorfni otvorenim podskupovima euklidske ravnine $\mathbb{E}^2$. Točnije,

Definicija 4.1

Ploha ili ***povezana topološka 2-mnogostrukost*** je povezan Hausdorffov prostor M koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, zajedno s familijom otvorenih skupova $U_\lambda \subseteq M$, $\lambda \in \Lambda$, koji pokrivaju M, i familijom homeomorfizama $\varphi_\lambda \colon U_\lambda \to \Omega_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, gdje su Ω_λ otvoreni podskupovi od $\mathbb{E}^2$.

DOGOVOR: Mi ćemo se baviti samo kompaktnim plohama, pa će nam termin ploha uvijek značiti kompaktnu plohu.

Napomena: Ovako definirane plohe često se nazivaju *plohe bez ruba* ili *zatvorene plohe*. Plohe s rubom nećemo definirati niti se njima baviti.

Napomene i komentari

- Parovi $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, nazivaju se *koordinatne karte* na M, homeomorfizmi $\varphi_\lambda \colon U_\lambda \to \Omega_\lambda$ *koordinatna preslikavanja*, a njihovi inverzi $\varphi_\lambda^{-1} \colon \Omega_\lambda \to U_\lambda$ *parametrizacije* od U_λ. Familija $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ naziva se *atlas* na M, a za svaku kartu (U, φ) za koju je $p \in U$, kažemo da je $\varphi^{-1} \colon \Omega \to U$ *parametrizacija plohe M oko točke p*.
- Kako će ‚naše' plohe uvijek biti kompaktne, moći ćemo pretpostaviti da je skup indeksa, Λ, konačan.
- Prethodna definicija plohe je prilično apstraktna. Plohe nisu definirane kao izvjesni podskupovi nekog euklidskog prostora $\mathbb{E}^n$. Čak nisu definirane niti kao metrički prostori. Ipak, pokazuje se da se sve plohe „mogu smjestiti" u $\mathbb{E}^4$, a orijentabilne čak u $\mathbb{E}^3$.
- S druge strane, mnogo toga je lakše raditi s ovako apstraktno definiranim plohama nego s određenim potprostorima od $\mathbb{E}^n$.

3 TRIANGULACIJA

- Simpleksi i simplicijalni kompleksi
- Triangulacija ploha

Geometrijska nezavisnost točaka

Kako bismo mogli govoriti o triangulaciji plohe, potrebno je definirati simplicijalne komplekse, a kako će nam oni trebati i pri definiciji homoloških grupa u petom poglavlju, ne možemo se ograničiti samo na dimenziju 2. Ali najprije malo afine geometrije.

Za skup točaka $\{a_0, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{E}^N$ kažemo da je ***geometrijski*** ili ***afino nezavisan*** ako su jednakosti

$$\sum_{j=0}^{n} t_j a_j = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{j=0}^{n} t_j = 0, \ \ t_j \in \mathbb{R},$$

istovremeno moguće jedino za $t_0 = t_1 = \cdots = t_n = 0$.

Lako se vidi da je to ekvivalentno zahtjevu da su vektori $a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0$ linearno nezavisni.

n-Dimenzionalna hiperravnina razapeta geometrijski nezavisnim skupom točaka $\{a_0, \ldots, a_n\}$ definira se kao skup

$$\left\{x = \sum_{j=0}^{n} t_j a_j : t_j \in \mathbb{R}, \ \sum_{j=0}^{n} t_j = 1\right\}.$$

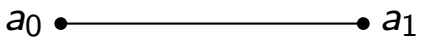
Simpleksi

Definicija 5.1

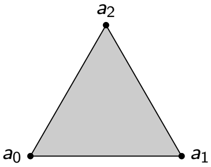
Neka je $\{a_0, \ldots, a_n\}$ geometrijski nezavisan skup točaka u $\mathbb{E}^N$. ***n-Simpleks*** σ razapet točkama $a_0, \ldots, a_n$ je skup

$$\left\{x = \sum_{j=0}^{n} t_j a_j : \sum_{j=0}^{n} t_j = 1,\ t_j \geqslant 0\right\}.$$

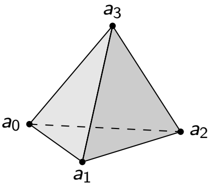
Brojevi t_j jednoznačno su određeni točkom x, i nazivaju se ***baricentričke koordinate*** točke x.



1-simpleks



2-simpleks



3-simpleks

Osnovne činjenice o simpleksima

- Točke $a_0, \ldots, a_n$ koje razapinju simpleks σ nazivaju se ***vrhovi*** simpleksa, a broj n je njegova ***dimenzija***, pa ćemo ga ponekad označivati σ^n.
- Svaki simpleks σ' razapet nekim podskupom od $\{a_0, \ldots, a_n\}$ naziva se ***stranica*** od σ, i pišemo $\sigma' \leqslant \sigma$. Za $(n-1)$-dimenzionalnu stranicu razapetu s $\{a_0, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n\}$ kaže se da je stranica ***nasuprot*** vrha a_j, i to je skup točaka $x \in \sigma$ za koje je $t_j = 0$.
- Unija svih pravih stranica, naziva se ***rub*** simpleksa σ, oznaka $\partial\sigma$. To je skup točaka $x \in \sigma$ kojima je barem jedna baricentrička koordinata jednaka nuli.
- ***Nutrina*** simpleksa je skup $\mathring{\sigma} = \sigma \setminus \partial\sigma$. To je otvoren podskup hiperravnine razapete skupom $\{a_0, \ldots, a_n\}$, i nekad se naziva otvorenim simpleksom (otvoren je u $\mathbb{E}^N$ samo kada je $n = N$).
- σ i $\mathring{\sigma}$ su konveksni podskupovi od $\mathbb{E}^N$.
- Postoji homeomorfizam $\sigma^n \to \mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ koji prevodi rub $\partial\sigma$ na jediničnu sferu $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x\| = 1\}$. Zapravo, dokazat ćemo više:

Konveksan otvoren skup u $\mathbb{E}^n$ homeomorfan je kugli

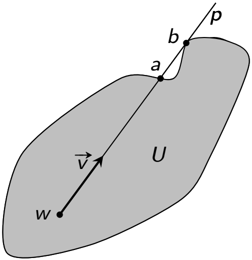
Lema 5.2

Neka je $U \subseteq \mathbb{E}^n$ omeđen otvoren konveksan skup i $w \in U$.

(a) *Svaki polupravac s početkom u w siječe rub $\partial U = \overline{U} \setminus U$ u točno jednoj točki.*

(b) *Postoji homeomorfizam $\overline{U} \xrightarrow{\cong} \mathbb{B}^n$ koji prevodi ∂U na $\mathbb{S}^{n-1}$.*

Dokaz: (a) $\overline{U}$ i proizvoljan polupravac $p = \{w + \lambda v : \lambda \geqslant 0\}$ su konveksni skupovi, pa je $p \cap \overline{U}$ konveksan zatvoren podskup od p, dakle segment $\{w + \lambda v : 0 \leqslant \lambda \leqslant \mu\}$ za neki $\mu \geqslant 0$. Lako se pokaže da je $a = w + \mu v \in \partial U$, i da je $w + \lambda v \in U$ za $\lambda < \mu$. Kada bi p sjekao ∂U u još nekoj točki $b = w + \eta v$, bilo bi $\eta > \mu$. $\Rightarrow\!\Leftarrow$



Dokaz tvrdnje (b)

(b) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $w = 0$ i $\overline{U} \subseteq \mathbb{B}^n$. Preslikavanje $f\colon \mathbb{E}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$ definirano s $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ je neprekidno, i restrikcija $f|_{\partial U}$ je bijekcija s ∂U na $\mathbb{S}^{n-1}$.

Kako je ∂U kompaktan, ta je restrikcija homeomorfizam, i neka je $g\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \partial U$ njezin inverz. Proširimo g do bijekcije $h\colon \mathbb{B}^n \to \overline{U}$ tako da za $s \in \mathbb{S}^{n-1}$, h preslikava segment $[0, s]$ na segment $[0, g(s)]$.

Formalno, definiramo

$$h(x) := \begin{cases} \left\|g\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| x \,, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} .$$

Preslikavanje h je neprekidna bijekcija, a kako je $\mathbb{B}^n$ kompaktan, h je homeomorfizam koji proširuje g, pa je njegov inverz $h^{-1}\colon \overline{U} \to \mathbb{B}^n$ traženi homeomorfizam. $\square$

Proširenje homeomorfizma ruba

Dokaz tvrdnje (b) pokazuje kako se svaki homeomorfizam $g\colon \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\cong} \partial U$ može proširiti do homeomorfizma $h\colon \mathbb{B}^n \xrightarrow{\cong} \overline{U}$, i obratno, svaki se homeomorfizam $\partial U \xrightarrow{\cong} \mathbb{S}^{n-1}$ može proširiti do homeomorfizma $\overline{U} \xrightarrow{\cong} \mathbb{B}^n$. Kao posljedicu dobivamo

Korolar 5.3

Neka je $U \subseteq \mathbb{E}^n$ omeđen otvoren konveksan skup. Tada se svaki homeomorfizam $f\colon \partial U \to \partial U$ može proširiti do homeomorfizma $h\colon \overline{U} \to \overline{U}$. □

Simplicijalni kompleksi

Simpleksi služe kao „cigle” za izgradnju složenijih prostora.

Definicija 5.4

Simplicijalni kompleks K u $\mathbb{E}^N$ je familija simpleksa takva da

(1) stranica svakog simpleksa iz K je simpleks u K;

(2) presjek svaka dva simpleksa iz K je stranica svakog od njih (moguće prazna).

Primijetimo da simplicijalni kompleks može biti beskonačan, tj. familija K može biti beskonačna.

Dimenzija simplicijalnog kompleksa K je najveća dimenzija simpleksa u familiji K.

Karakterizacija simplicijalnog kompleksa

Za provjeru čini li neka familija simpleksa simplicijalni kompleks, često je korisna sljedeća

Lema 5.5

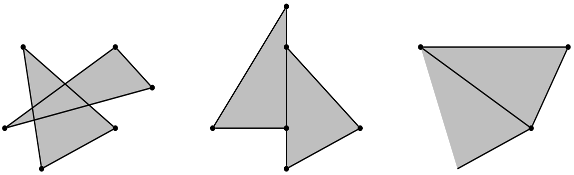
Familija K simpleksa čini simplicijalni kompleks ako i samo ako vrijedi

(1) *stranica svakog simpleksa iz K je simpleks u K;*

(2′) *svaka dva različita simpleksa u K imaju disjunktne nutrine.*

Za dokaz, koji nije težak, vidi [Munkres].

Familije simpleksa koje ***ne*** čine simplicijalni kompleks



Potkompleks

Neka je σ neki n-simpleks. Prema prethodnoj lemi, familija koja se sastoji od σ i svih njegovih pravih stranica, je simplicijalni kompleks. Očito je ispunjeno (1), a $(2')$ slijedi iz činjenice da za svaku točku $x \in \sigma$ postoji jedna jedina stranica koja sadrži x u svojoj nutrini.

Ako je $L \subseteq K$ potfamilija od K koja sadrži sve stranice svojih članova, onda je i L simplicijalni kompleks — ***potkompleks*** od K.

Naprimjer, familija svih simpleksa iz K kojima je dimenzija $\leqslant q$ je potkompleks od K koji se naziva ***q-skelet*** od K, u oznaci $K^{(q)}$. Točke 0-skeleta $K^{(0)}$ su ***vrhovi*** od K, i označivat ćemo ih α, β, itd.

Naprimjer, $(n-1)$-skelet $\sigma^{(n-1)}$ n-simpleksa σ je upravo njegov rub $\partial\sigma$.

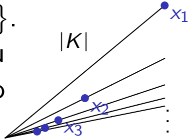
Politopi i poliedri

Definicija 5.6

Neka je K simplicijalni kompleks u $\mathbb{E}^N$, i neka je $|K| \subseteq \mathbb{E}^N$ unija svih simpleksa iz K. Svaki simpleks neka ima topologiju naslijeđenu od $\mathbb{E}^N$, a na $|K|$ neka je topologija definirana tako da je podskup od $A \subseteq |K|$ zatvoren ako i samo ako je $A \cap \sigma$ zatvoren u σ za svaki $\sigma \in K$. Tako dobiven topološki prostor $|K|$ naziva se ***politop*** ili ***geometrijska realizacija*** od K. Topološki prostor koji je politop nekog simplicijalnog kompleksa naziva se ***poliedar***.

Napomena: Ovako definirana topologija na $|K|$ naziva se ***CW*** ili ***slaba topologija***, i ona je općenito finija od topologije naslijeđene od $\mathbb{E}^N$. Ali kada je K lokalno konačan onda se obje topologije podudaraju.

Primjer: K je familija segmenata $\left\{\left[(0,0)\,,(1,\frac{1}{k})\right] : k \in \mathbb{N}\right\}$. Skup $A = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq |K|$ zatvoren je u $|K|$ sa CW topologijom, ali nije zatvoren u $|K|$ kao potprostoru ravnine $\mathbb{E}^2$.



Zatvorenost potkompleksa

Trebat će nam nekoliko jednostavnih topoloških činjenica.

Lema 5.7

Neka je L potkompleks od K. Tada je $|L|$ zatvoren potprostor od $|K|$. Specijalno, svaki je $\sigma \in K$ zatvoren potprostor od $|K|$.

Dokaz: Neka je A zatvoren u $|L|$. Za svaki simpleks* $\sigma \in K$ je $\sigma \cap |L|$ unija onih stranica $\sigma' \leqslant \sigma$ koje su u L, pa, jer je A zatvoren u L, $A \cap \sigma'$ je zatvoren u σ', dakle i u σ. Kako je $A \cap \sigma = \bigcup_{\sigma' \leqslant \sigma} A \cap \sigma'$ konačna unija zatvorenih skupova, on je zatvoren u σ.
Jer to vrijedi za svaki $\sigma \in K$, zaključujemo da je A zatvoren u $|K|$. Dakle, svaki zatvoren podskup $A \subseteq |L|$ je zatvoren i u $|K|$, tj. relativna topologija na $|L|$ je finija od CW topologije na $|L|$.

Obratno, ako je B zatvoren u $|K|$ onda je $B \cap \sigma$ zatvoren u σ za sve $\sigma \in K$, pa onda i za sve $\sigma \in L$. Stoga $B \cap |L|$ zatvoren u $|L|$, pa je CW topologija na $|L|$ finija od relativne topologije na $|L|$. □

*Politop $|\sigma|$ simpleksa σ najčešće ćemo označivati jednostavno σ.

Neprekidnost preslikavanja $f\colon |K| \to Y$

Glavni razlog za uvođenje CW topologije, umjesto da se rabi metrička topologija, tj. topologija potprostora od $\mathbb{E}^n$, je sljedeći:

Propozicija 5.8

Preslikavanje $f\colon |K| \to X$ je neprekidno ako i samo ako je restrikcija $f|_\sigma$ neprekidna za sve $\sigma \in K$.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Očito: restrikcija neprekidnog preslikavanja je uvijek neprekidna.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je restrikcija $f|_\sigma$ neprekidna za sve $\sigma \in K$. Treba pokazati da je praslika $f^{-1}(C)$ svakog zatvorenog skupa $C \subseteq X$ zatvorena u $|K|$, tj. da je $f^{-1}(C) \cap \sigma$ zatvoren u σ za sve $\sigma \in K$.

No, $f^{-1}(C) \cap \sigma = (f|_\sigma)^{-1}(C)$, a to je zatvoren skup u σ jer je restrikcija $f|_\sigma$ neprekidna. $\square$

Baricentričke koordinate

Ako je x točka politopa $|K|$ onda je x u nutrini točno jednog simpleksa $\sigma \in K$. Neka su $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ njegovi vrhovi. Tada su jedinstveno određeni brojevi $t_j > 0$, $j = 0, \ldots, n$, takvi da je $x = \sum_{j=0}^{n} t_j \alpha_j$ i $\sum_{j=0}^{n} t_j = 1$. Za proizvoljan vrh α od K definiramo ***baricentričku koordinatu*** točke x s obzirom na vrh α kao

$$t_\alpha(x) := \begin{cases} 0\ , \text{ ako je } \alpha \neq \alpha_0, \ldots, \alpha_n \\ t_j\ , \text{ ako je } \alpha = \alpha_j \text{ za } j = 0, \ldots, n \end{cases}.$$

Baricentričke koordinate su neprekidne funkcije $f_\alpha \colon |K| \to \mathbb{R}$.
Zaista, fiksirajmo vrh α. Restrikcija funkcije t_α na proizvoljan simpleks $\sigma \in K$ je neprekidna, jer je to ili konstantna funkcija 0 (ako α nije vrh od σ), ili je to baricentrička koordinata iz definicije 5.1. Stoga je t_α neprekidna funkcija prema propoziciji 5.8.

Hausdorffovo svojstvo i kompaktnost

Ako je K beskonačan simplicijalni kompleks u $\mathbb{E}^N$, onda se topologija na $|K|$ ne mora podudarati s metričkom topologijom potprostora od $\mathbb{E}^N$. Stoga je važna sljedeća činjenica:

Lema 5.9

Politop $|K|$ svakog simplicijalnog kompleksa K je Hausdorffov prostor.

Dokaz: Neka su $a, b \in |K|$ dvije različite točke. Tada postoji barem jedan vrh α t.d. je $t_\alpha(a) \neq t_\alpha(b)$. BSO* neka je $t_\alpha(a) < t_\alpha(b)$, i neka je r t.d. je $t_\alpha(a) < r < t_\alpha(b)$. Tada su $U = \{x : t_\alpha(x) < r\}$ i $V = \{x : t_\alpha > r\}$ disjunktni otvoreni skupovi oko a odnosno b. □

Ako je K konačan simplicijalni kompleks onda je njegov politop $|K|$ konačna unija simpleksa, koji su kompaktni. Stoga vrijedi

Propozicija 5.10

Politop $|K|$ konačnog simplicijalnog kompleksa K je kompaktan. □

*Bez smanjenja općenitosti

Kompaktan podskup je sadržan u konačnom potkompleksu

Vrijedi i neka vrsta obrata.

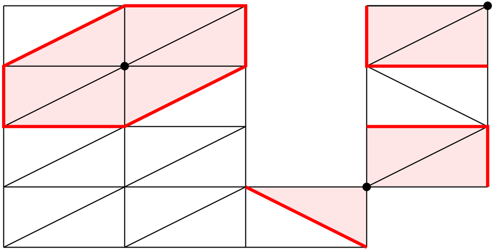
Lema 5.11

Ako je $A \subseteq |K|$ kompaktan podskup, onda postoji konačan potkompleks $L \subseteq K$ t.d. je $A \subseteq |L|$.

Dokaz: Pretpostavimo da kompaktan skup A nije sadržan u politopu niti jednog konačnog potkompleksa. Za svaki simpleks $\sigma \in K$ t.d. je $A \cap \mathring{\sigma} \neq \emptyset$, odaberimo točku $x_\sigma \in A \cap \mathring{\sigma}$. Skup B svih tako odabranih točaka je beskonačan, i svaki njegov podskup je zatvoren jer je njegov presjek sa svakim simpleksom ili prazan ili konačan. $B \subseteq A$ je dakle, beskonačan, zatvoren i diskretan skup pa nema gomilište, u suprotnosti s činjenicom da u kompaktnom Hausdorffovom prostoru svaki beskonačan skup ima gomilište. □

Zvijezde i linkovi

Neka je α vrh simplicijalnog kompleksa K. ***Zvijezda*** vrha α u K, oznaka $\operatorname{St}\alpha$, je unija nutrina svih simpleksa od K kojima je α vrh. Njeno zatvorenje, ***zatvorena zvijezda***, u oznaci $\overline{\operatorname{St}}\,\alpha$, je unija svih simpleksa od K kojima je α vrh, i politop je potkompleksa od K. Skup $\overline{\operatorname{St}}\,\alpha \setminus \operatorname{St}\alpha$ je ***link*** vrha α, oznaka $\operatorname{Lk}\alpha$.



Skup $\operatorname{St}\alpha$ je otvoren u $|K|$ jer je to skup točaka $x \in |K|$ t.d. je $t_\alpha(x) > 0$.
$\operatorname{Lk}\alpha = \overline{\operatorname{St}}\,\alpha \cap (|K| \setminus \operatorname{St}\alpha)$ je politop potkompleksa od K.
Skupovi $\overline{\operatorname{St}}\,\alpha$ i $\operatorname{St}\alpha$ su putevima povezani, dok $\operatorname{Lk}\alpha$ ne mora biti povezan.

Lokalna konačnost i lokalna kompaktnost

Za simplicijalni kompleks kažemo da je ***lokalno konačan*** ako svaki vrh pripada samo konačnom broju simpleksa.
Svaki je konačan simplicijalan kompleks očito i lokalno konačan.

Nadalje, kompleks K je lokalno konačan ako i samo ako je svaka zatvorena zvijezda $\overline{\mathrm{St}}\,\alpha$ politop konačnog potkompleksa od K.

Lema 5.12

Simplicijalni kompleks K je lokalno konačan ako i samo ako je njegov politop $|K|$ lokalno kompaktan topološki prostor.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je K lokalno konačan. Točka $x \in |K|$ leži u $\mathrm{St}\,\alpha$ za neki vrh α, pa je $\overline{\mathrm{St}}\,\alpha$ tražena kompaktna okolina od x.
$\Leftarrow$ Neka je $|K|$ lokalno kompaktan i $\alpha \in K$ vrh od beskonačno mnogo simpleksa iz K. Tada svaka okolina od α u $|K|$ siječe beskonačno mnogo simpleksa, pa njeno zatvorenje ne može biti sadržano u politopu nekog konačnog potkompleksa, te, prema lemi 5.11, ne može biti kompaktno. $\square$

Triangulacija kompaktnih ploha

Triangulacija plohe je poseban tip 2-dimenzionalnog simplicijalnog kompleksa i funkcije s njega na plohu.

Definicija 6.1

Triangulacija kompaktne plohe M je par (K, τ), gdje je K konačan 2-dimenzionalan simplicijalni kompleks, a funkcija $\tau\colon K \to \mathscr{P}(M)$* svakom simpleksu $\sigma \in K$ pridružuje zatvoren podskup $\tau(\sigma) \subseteq M$, tako da vrijedi:

(τ1) $\tau(\sigma_1) \cap \tau(\sigma_2) = \tau(\sigma_1 \cap \sigma_2)$ za sve $\sigma_1, \sigma_2 \in K$;

(τ2) za svaki $\sigma \in K$ postoji homeomorfizam $\varphi_\sigma\colon |\sigma| \to \tau(\sigma)$ takav da za sve stranice $\sigma' \leqslant \sigma$ vrijedi $\varphi_\sigma(\sigma') = \tau(\sigma')$;

(τ3) $\bigcup_{\sigma \in K} \tau(\sigma) = M$, tj. skupovi $\tau(\sigma)$ pokrivaju M;

Ako je (K, τ) triangulacija plohe M, onda ćemo i sâmu funkciju $\tau\colon K \to \mathscr{P}(M)$, a ponekad i sâm K, zvati triangulacijom od M.

*$\mathscr{P}(M)$ je partitivni skup od M.

Homeomorfnost plohe i politopa njezine triangulacije

Triangulacija plohe nije jedinstvena. Ali,

Teorem 6.2

Za svaku triangulaciju $\tau\colon K \to \mathscr{P}(M)$ kompaktne plohe M postoji homeomorfizam $h\colon |K| \to M$ t.d. je $h(|\sigma|) = \tau(\sigma)$ za sve $\sigma \in K$, tj. h preslikava svaki geometrijski simpleks $|\sigma|$ homeomorfno na $\tau(\sigma)$.

Dokaz: Na vrhovima $\alpha \in K^{(0)}$ definiramo $h(\alpha) := \tau(\alpha)$.

Na 1-simpleksima definiramo h kao bilo koji od homeomorfizama koji postoje prema $(\tau2)$, i primijetimo da će slike nutrina različitih 1-simpleksa biti disjunktne zbog $(\tau1)$. Time je h definiran na rubu svakog 2-simpleksa $\sigma \in K$, i slika $h(\partial\sigma)$ je homeomorfna kružnici $\mathbb{S}^1$.

Treba još h proširiti na nutrine svih 2-simpleksa $\sigma \in K$.

Prema $(\tau2)$ postoji homeomorfizam $\varphi_\sigma\colon |\sigma| \to \tau(\sigma)$, ali se φ_σ ne mora na rubu $\partial\sigma$ * podudarati s već definiranim h.

(nastavak) ☞

*Oznaku $\partial\sigma$ rabimo i za politop $|\partial\sigma|$, a ne samo za simplicijalni kompleks $\partial\sigma$.

Završetak dokaza

Restrikcija $\partial\sigma \xrightarrow{h|_{\partial\sigma}} h(\partial\sigma) = \tau(\partial\sigma) \xrightarrow{\varphi_\sigma^{-1}} \partial\sigma$ je homeomorfizam, pa se, prema korolaru 5.3, može proširiti do homeomorfizma $\psi\colon \sigma \to \sigma$. Tada je $\varphi_\sigma \circ \psi\colon |\sigma| \to \tau(\sigma)$ homeomorfizam koji se na rubu $\partial\sigma$ podudara s h. Time je h definiran na cijelom $|K|$.

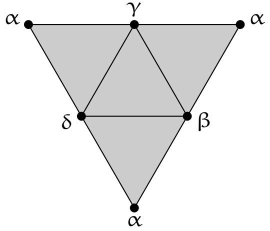
Tvrdnja: *h je neprekidno preslikavanje:* Zaista, za proizvoljan zatvoren skup $C \subseteq M$ i svaki simpleks $\sigma \in K$ je $h^{-1}(C) \cap \sigma = (h|_\sigma)^{-1}(C)$, a to je zatvoren skup u σ jer je $h|_\sigma$ neprekidno, pa je, prema propoziciji 5.8, preslikavanje h neprekidno.

Na svakom $\sigma \in K$ je h injektivno, pa je zbog $(\tau 1)$, h injekcija na cijelom $|K|$, a surjektivnost slijedi iz $(\tau 3)$, pa je $h\colon |K| \to M$ bijekcija. Kako je kompleks K konačan, to je, prema propoziciji 5.10, politop $|K|$ kompaktan.

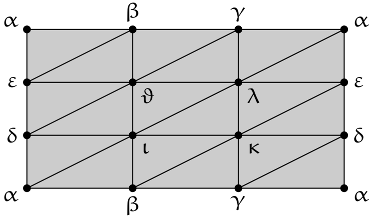
Dakle, $h\colon |K| \to M$ je neprekidna bijekcija, a kako je $|K|$ kompaktan i M je Hausdorffov, zaključujemo da je h homeomorfizam. $\square$

Primjeri triangulacija

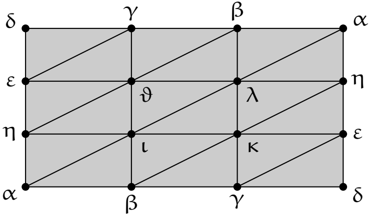
Politopi (geometrijske realizacije) ovih triangulacija dobiju se lijepljenjem parova bridova s istim vrhovima.



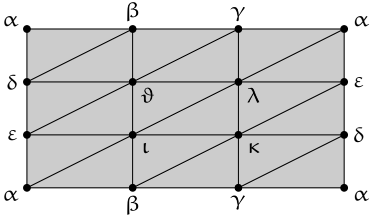
sfera



torus



projektivna ravnina



Kleinova boca

Karakterizacija kompleksa koji trianguliraju plohe

Teorem 6.3

$\tau\colon K \to \mathscr{P}(M)$, *gdje je* K *konačan 2-dimenzionalan simplicijalni kompleks, je triangulacija kompaktne plohe* $M = |K|$ *t.d. je* $\tau(\sigma) = |\sigma|$ *za sve* $\sigma \in K$, *ako i samo ako vrijedi sljedeće:*

$\Delta 1$ *Svaki brid* $a \in K$ *je stranica točno dvaju trokutova* $A \in K$.

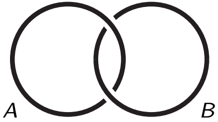
$\Delta 2$ *Za svaki vrh* $\alpha \in K$ *se bridovi* a_j *i trokuti* A_k *kojima je* α *vrh, mogu svrstati u ciklički niz* $a_1, A_1, a_2, A_2, \ldots, a_m, A_m$, *tako da je* $a_j = A_{j-1} \cap A_j$ *za sve* $2 \leqslant j \leqslant m$, *i* $a_1 = A_m \cap A_1$, *za* $m \geqslant 3$.

$\Delta 3$ K *je povezan, što znači da se ne može prikazati kao unija dvaju disjunktnih nepraznih kompleksa.*

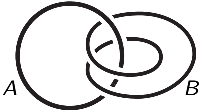
Komplekse koji zadovoljavaju uvjete gornjeg teorema nazivat ćemo ***triangulirani 2-kompleksi bez ruba***; oni korespondiraju trianguliranim plohama. Pokazuje se da se svaka ploha može triangulirati, pa je klasa geometrijskih realizacija trianguliranih 2-kompleksa bez ruba isto što i klasa svih ploha. Dokaz ćemo, ili nećemo, napraviti kasnije.

Ulančane kružnice

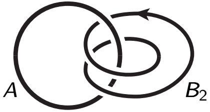
„Znamo" da kružnice A i B na slici ne možemo rastaviti nikakvim stezanjem/rastezanjem, guranjem/povlačenjem i sl. Fundamentalna grupa će omogučiti strog dokaz te činjenice.



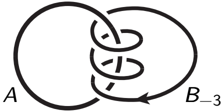
No kružnica B može i više puta obilaziti A, a i orijentacija može biti važna.



Dogovorimo se da je obilazak B oko A *pozititivan* ako B prolazi „odostrag prema naprijed" kroz A, negativan ako je obratno, i da je taj broj jednak nuli ako A i B nisu ulančane.



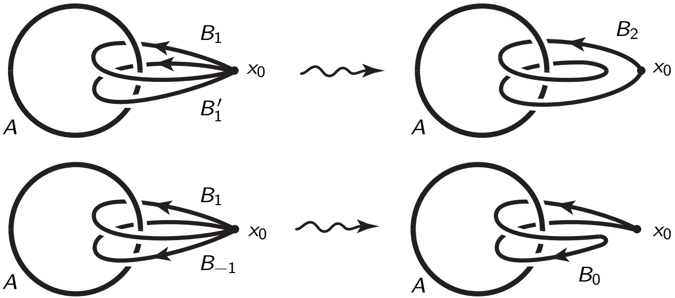
Dakle, svakoj orijentiranoj kružnici B pridružen je neki cijeli broj, i obratno za svaki $n \in \mathbb{Z}$ imamo kružnicu B_n koja n puta obilazi A.



Ali, htjeli bismo više, jer cijeli brojevi nisu samo skup — oni se mogu zbrajati, čine grupu.

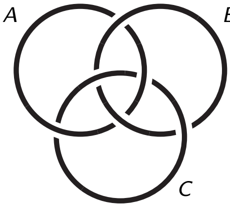
„Zbrajanje" petlji

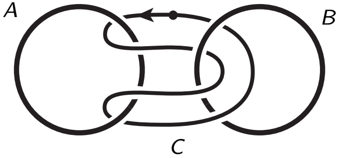
Na orijentiranu kružnicu možemo gledati kao na petlju — put s istim početkom i završetkom, a petlje iz iste točke x_0 možemo „zbrajati" nadovezivanjem.
Npr. ako su B_1 i B_1' dvije petlje koje jednom obilaze A, njihov zbroj $B_1 + B_1'$ obilazi A dva puta, kao i petlja B_2 na koju se $B_1 + B_1'$ može deformirati. Slično se petlja $B_1 + B_{-1}$ deformira u petlju B_0 koja uopće ne obilazi A (nije „zapetljana" s A).



Borromeovi* prsteni

Pogledajmo jedan kompliciraniji primjer s 3 isprepletene kružnice:



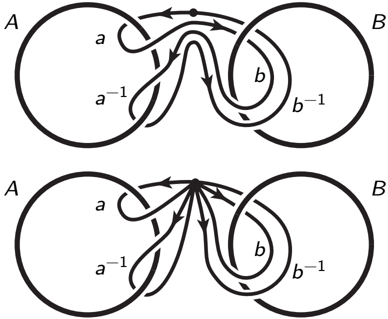


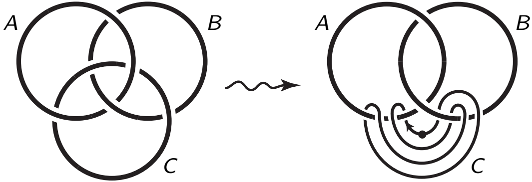
Kao i ranije, na jednu od kružnica, C, gledamo kao na petlju u komplementu ostale dvije. Možemo li ju „otpetljati"? Najprije „odvučemo" A od B. Krenemo li duž C od istaknute točke u označenom smjeru prolazimo „napred" kroz A, „napred" kroz B, „natrag" kroz A, „natrag" kroz B. Mjerimo li obilazak oko kružnica A i B s dva cijela broja, za svaku od njih ti su brojevi jednaki 0, što reflektira činjenicu da C nije zapetljana niti s A niti s B zasebno.

*Vitaliano Borromeo (1620–1690), talijanski arhitekt

Nekomutativnost

Označimo svaki prolaz petlje C kroz A i B slovima a i b ako je „napred”, odnosno a^{-1} i b^{-1} ako je „natrag”. C možemo deformirati u sumu (produkt) $a\,b\,a^{-1}b^{-1}$ od 4 petlje, tj. komutator od a i b, i činjenica da se C ne da „raspetljati” od $A \cup B$ znači da taj komutator nije trivijalan, tj. dobivena grupa nije komutativna (i obratno).

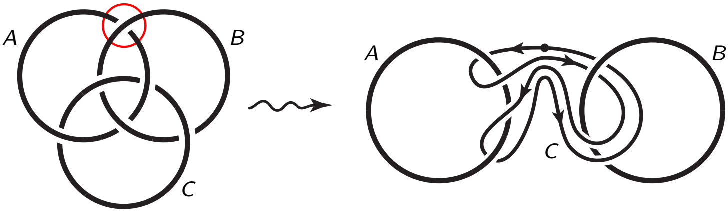


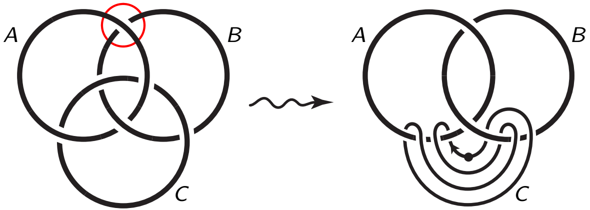


Ovo je jedna varijanta Booromeovih prstenova. I tu je C komutator „prolaza” petlji a i b kroz A i B, ali je sada taj komutator trivijalan.

Usporedba

Usporedimo ove dvije varijante Booromeovih prstenova:



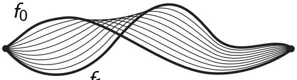


U čemu je razlika? Samo u jednom podvožnjaku/nadvožnjaku.

Putevi i homotopije

Put u prostoru X je preslikavanje $f\colon I \to X$, $I = [0,1]$.

Homotopija puteva je familija preslikavanja $f_t\colon I \to X$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, t.d. je



(1) $f_t(0) = x_0$, $f_t(1) = x_1$ za sve t, i

(2) Pridruženo preslikavanje $F\colon I \times I \to X$ definirano s $F(s,t) = f_t(s)$ je neprekidno.

Kažemo da su putevi f_0 i f_1 ***homotopni*** i pišemo $f_0 \simeq f_1$, ili $f_0 \overset{f_t}{\simeq} f_1$ ako želimo naznačiti i sâmu homotopiju.

U $\mathbb{E}^n$ svaka su dva puta sa zajedničkim krajevima homotopna ***linearnom homotopijom*** $f_t(s) = (1-t)\, f_0(s) + t\, f_1(s)$.
To isto vrijedi i u svakom konveksnom potprostoru od $\mathbb{E}^n$.
Put f za koji je $f(0) = f(1) = x_0$ naziva se ***petlja*** u x_0.

Svaka je petlja u (konveksnom potprostoru od) $\mathbb{E}^n$ ***nul-homotopna***, tj. homotopna konstantnoj petlji.

Homotopske klase

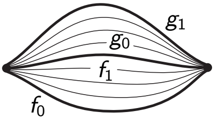
Propozicija 8.1

Homotopnost puteva sa zajedničkim krajevima je relacija ekvivalencije.

Klasu ekvivalencije puta f nazivamo njegovom ***homotopskom klasom*** i označavamo $[f]$.

Dokaz: *Tranzitivnost*: Ako je $f_0 \overset{f_t}{\simeq} f_1$ i $f_1 = g_0 \overset{g_t}{\simeq} g_1$,

onda je $f_0 \overset{h_t}{\simeq} g_1$, gdje je $h_t := \begin{cases} f_{2t} & , 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ g_{2t-1} & , \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$.

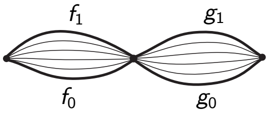


Refleksivnost i simetrija su očite. $\square$

Produkt puteva

Za puteve $f, g\colon I \to X$ za koje je $f(1) = g(0)$ definira se **produktni put** $f \bullet g$ formulom $(f \bullet g)(s) := \begin{cases} f(2s) & , 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ g(2s-1) , & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$.

Produkt puteva „dobro se ponaša" prema homotopijama, tj. ako su $f_0 \overset{f_t}{\simeq} f_1$ i $g_0 \overset{g_t}{\simeq} g_1$ i $f_0(1) = g_0(0)$ t.d. je produkt $f_0 \bullet g_0$ definiran, onda $f_t \bullet g_t$ definira homotopiju $f_0 \bullet g_0 \simeq f_1 \bullet g_1$.



Fundamentalna grupa

Neka je X prostor, $x_0 \in X$ fiksirana ***bazna točka***, i promatrajmo samo puteve u X koji počinju i završavaju u x_0, dakle petlje u x_0. Označimo s $\pi_1(X, x_0)$ skup svih homotopskih klâsa $[f]$ petlji u x_0.

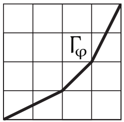
Propozicija 8.2

$\pi_1(X, x_0)$ je grupa s obzirom na množenje $[f]\,[g] := [f \bullet g]$.
*To je **fundamentalna grupa** prostora X u baznoj točki x_0.*

Dokaz: ***Reparametrizacija*** puta f je kompozicija $f\varphi$ gdje je $\varphi\colon I \to I$ bilo koje preslikavanje t.d. je $\varphi(0) = 0$ i $\varphi(1) = 1$.

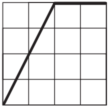
Očito je uvijek $f\varphi \overset{f\varphi_t}{\simeq} f$, gdje je $\varphi_t(s) = (1-t)\,\varphi(s) + t\,s$.

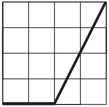
Asocijativnost: Neka su $f, g, h\colon I \to X$ putevi t.d. je $f(1) = g(0)$ i $g(1) = h(0)$ pa su definirani produkti $(f \bullet g) \bullet h$ i $f \bullet (g \bullet h)$. Tada je put $f \bullet (g \bullet h)$ reparametrizacija puta $(f \bullet g) \bullet h$ pomoću po dijelovima linearne funkcije φ kao na slici.



$\pi_1(X, x_0)$ je grupa

Neutralni element: Neka je $f\colon I \to X$ put od x_0 do x_1 a $c_{x_1}\colon I \to X$ neka je konstantan put u x_1. Tada je $f \bullet c_{x_1}$ reparametrizacija puta f funkcijom čiji je graf na lijevoj slici. Slično, put $c_{x_0} \bullet f$, gdje je c_{x_0} konstantan put u x_0, je reparametrizacija puta f funkcijom čiji je graf na desnoj slici. Dakle, $[c_{x_0}]$ je neutralni element u $\pi_1(X, x_0)$.





Inverz: Za put f od x_0 do x_1 ***inverzni put*** $\bar{f}$ je put od x_1 do x_0 definiran kao $\bar{f}(s) := f(1-s)$.

Neka je $i\colon I \to I$ identiteta, dakle put u I od 0 do 1, a $c_0\colon I \to I$ neka je konstantan put u 0. Tada je $i \bullet \bar{i} \simeq c_0$ jer je I konveksan, pa je

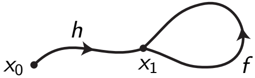
$$f \bullet \bar{f} = (f \circ i) \bullet (f \circ \bar{i}) = f \circ (i \bullet \bar{i}) \simeq f \circ c_0 = c_{x_0}.$$

Slično se vidi da je $\bar{f} \bullet f \simeq c_{x_1}$, pa je, kada se radi o petljama, $[\bar{f}] = [f]^{-1}$.□

Primjer: Za svaki konveksan $X \subseteq \mathbb{E}^n$ i svaku točku $x_0 \in X$ je $\pi_1(X, x_0) = 0$.

Ovisnost o baznoj točki

Ovisi li fundamentalna grupa o izboru bazne točke? Očito da.
Jasno je da se možemo nadati nekoj vezi između $\pi_1(X, x_0)$ i $\pi_1(X, x_1)$ jedino ako x_0 i x_1 leže u istoj komponenti povezanosti putevima.
Za put $h\colon I \to X$ od x_0 do x_1 i petlju f u x_1 definirajmo $\beta_h([f]) := [h \bullet f \bullet \overline{h}]$.



Propozicija 8.3

$\beta_h\colon \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ je izomorfizam grupa.

Dokaz: Ako je f_t homotopija petlji u x_1 onda je $h \bullet f_t \bullet \overline{h}$ homotopija petlji u x_0 pa je β_h dobro definirano.

Nadalje, $\beta_h([f \bullet g]) = [h \bullet f \bullet g \bullet \overline{h}] = [h \bullet f \bullet \overline{h} \bullet h \bullet g \bullet \overline{h}] = \beta_h([f])\, \beta_h([g])$, pa je β_h homomorfizam.

Konačno, $\beta_{\overline{h}}\, \beta_h([f]) = \beta_{\overline{h}}([h \bullet f \bullet \overline{h}]) = [\overline{h} \bullet h \bullet f \bullet \overline{h} \bullet h] = [f]$, i slično je $\beta_h\, \beta_{\overline{h}}([g]) = [g]$, za sve $[g] \in \pi_1(X, x_0)$, pa je β_h izomorfizam s inverzom $\beta_{\overline{h}}$. $\square$

Jednostavno povezani prostori

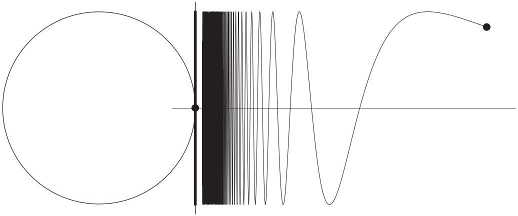
Dakle, ako je prostor X putevima povezan onda je grupa $\pi_1(X, x_0)$, do na izomorfizam, neovisna o baznoj točki x_0, pa se često označava jednostavno $\pi_1(X)$ ili samo $\pi_1 X$.

Za prostor X kažemo da je ***jednostavno povezan*** ili ***1-povezan*** ako je putevima povezan i $\pi_1(X) = 0$. Očito vrijedi

Propozicija 8.4

X je jednostavno povezan ako i samo ako za svake dvije točke postoji jedinstvena homotopska klasa puteva koji povezuju te točke. $\square$

Primjer povezanog (ne putevima povezanog) prostora kod kojeg fundamentalna grupa ovisi o baznoj točki

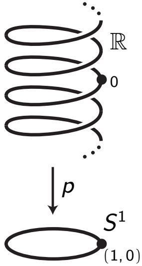


Fundamentalna grupa kružnice

Označimo s $\omega_n \colon I \to \mathbb{S}^1$ petlju $s \mapsto (\cos 2\pi n\, s, \sin 2\pi n\, s)$ u točki $(1,0) \in \mathbb{S}^1$, i neka je $\Phi \colon \mathbb{Z} \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$ definirano s $\Phi(n) := [\omega_n]$.

Teorem 9.1

Preslikavanje $\Phi \colon \mathbb{Z} \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$ je izomorfizam grupa.



Dokaz: Označimo s $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ preslikavanje $s \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$. Tada je $\omega_n = p\, \widetilde{\omega_n}$ gdje je $\widetilde{\omega_n} \colon I \to \mathbb{R}$ definirano s $\widetilde{\omega_n}(s) := ns$. Kaže se da je put $\widetilde{\omega_n}$ ***podizanje*** petlje ω_n. Zbog konveksnosti prostora $\mathbb{R}$ je $\Phi(n) = [p \circ \tilde{f}]$ za bilo koji put $\tilde{f}$ u $\mathbb{R}$ od 0 do n, jer je $\tilde{f} \simeq \widetilde{\omega_n}$ za svaki takav put.

Neka je $\tau_m \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ translacija $\tau_m(x) := x + m$.
Tada je $\widetilde{\omega_m} \bullet (\tau_m \circ \widetilde{\omega_n})$ put u $\mathbb{R}$ od 0 do $m+n$, pa je

$$\begin{aligned}\Phi(m+n) &= [p \circ (\widetilde{\omega_m} \bullet (\tau_m \circ \widetilde{\omega_n}))] = [(p \circ \widetilde{\omega_m}) \bullet (p \circ \tau_m \circ \widetilde{\omega_n})] \\ &= [(p \circ \widetilde{\omega_m}) \bullet (p \circ \widetilde{\omega_n})] = \Phi(m)\, \Phi(n).\end{aligned}$$

tj. Φ je homomorfizam. ✓

Φ je izomorfizam

Kako bismo dokazali da je Φ izomorfizam, dokazat ćemo:

(a) Za svaki put $f\colon I \to \mathbb{S}^1$ iz točke $x_0 \in \mathbb{S}^1$ i svaku točku $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, postoji jedinstveno podizanje $\tilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ s početkom u $\tilde{x}_0$.

(b) Za svaku homotopiju $f_t\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$ puteva s početkom u x_0 i svaku točku $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, postoji jedinstvena homotopija puteva $\widetilde{f_t}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ s početkom u $\tilde{x}_0$ koja podiže f_t.

Pokažimo najprije kako iz ovih dviju tvrdnji slijedi teorem:

Surjektivnost: Za $[f] \in \pi_1(\mathbb{S}^1) = \pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0))$ neka je $\tilde{f}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ podizanje od f s početkom u $0 \in \mathbb{R}$.
Tada je $\tilde{f}(1) = n \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ za neki n, i $\Phi(n) = [p \circ \tilde{f}] = [f]$. ✓

Injektivnost: Neka je $\Phi(m) = \Phi(n)$, tj. $f_0 := \omega_m \simeq \omega_n =: f_1$. Neka je $\widetilde{f_t}$ podizanje te homotopije s početkom u $0 \in \mathbb{R}$. Zbog jedinstvenosti podizanja je $\widetilde{f_0} = \widetilde{\omega_m}$ i $\widetilde{f_1} = \widetilde{\omega_n}$. Jer je $\widetilde{f_t}$ homotopija puteva, krajevi miruju, pa je
$m = \widetilde{\omega_m}(1) = \widetilde{f_0}(1) = \widetilde{f_1}(1) = \widetilde{\omega_n}(1) = n.$ ✓

Dokaz tvrdnji (a) i (b)

Obje ćemo tvrdnje dobiti kao posljedicu sljedeće tvrdnje:

(c) Za svaku homotopiju $F\colon Y \times I \to \mathbb{S}^1$ i podizanje $\widetilde{F_0}\colon Y \times \{0\} \to \mathbb{R}$ restrikcije $F_0 = F|Y \times \{0\}$, postoji jedinstveno podizanje $\tilde{F}\colon Y \times I \to \mathbb{R}$ od F čija je restrikcija na $Y \times \{0\}$ zadano preslikavanje $\widetilde{F_0}$, tj. $\tilde{F}_0 = \widetilde{F_0}$.

$$\begin{tikzcd} Y \times \{0\} \arrow[r, "\widetilde{F_0}"] \arrow[d, hook] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{F}"] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

Odavde slijedi tvrdnja (a) za $Y = *$, a tvrdnja (b) dobije se ovako:
Neka je $Y = [0,1]$. Homotopiji f_t u (b) pridruženo je preslikavanje $F\colon [0,1] \times I \to \mathbb{S}^1$ definirano s $F(s,t) := f_t(s)$.
Jedinstveno podizanje $\widetilde{F_0}\colon [0,1] \times \{0\} \to \mathbb{R}$ dobije se primjenom (a).
Tada (c) daje jedinstveno podizanje $\tilde{F}\colon [0,1] \times I \to \mathbb{R}$.
Restrikcije $\tilde{F}|\{0\} \times I$ i $\tilde{F}|\{1\} \times I$ su podizanja konstantnih puteva u $\mathbb{S}^1$, pa su to, zbog jedinstvenosti u (a), konstantni putevi u $\mathbb{R}$.
Znači, $\tilde{f}_t(s) := \tilde{F}(s,t)$ je homotopija puteva, i $\tilde{f}_t$ je podizanje od f_t jer je $p \circ \tilde{F} = F$. ✓

Dokaz tvrdnje (c)

Za dokaz (c) rabit ćemo sljedeće svojstvo preslikavanja $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$:

Postoji otvoren pokrivač $\{U_\alpha\}$ od $\mathbb{S}^1$ t.d. se za svaki α, skup $p^{-1}(U_\alpha)$ sastoji od disjunktne unije otvorenih podskupova u $\mathbb{R}$ t.d. je restrikcija od p na svakog od njih, homeomorfizam na U_α. $(*)$

Najprije ćemo za proizvoljnu točku $y \in Y$ konstruirati podizanje $\tilde{F}_y\colon N_y \times I \to \mathbb{R}$ za neku okolinu $N_y \ni y$. Za svaki t, točka $(y, t) \in Y \times I$ ima produktnu okolinu $N_t \times \langle a_t, b_t \rangle$ t.d. je $F(N_t \times \langle a_t, b_t \rangle) \subseteq U_\alpha$ za neki α. Zbog kompaktnosti, konačno mnogo takvih okolina pokriva $\{y\} \times I$. Stoga postoji okolina $N \ni y$ i $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ t.d. je za svaki i, $F(N \times [t_i, t_{i+1}])$ sadržan u nekom U_α, kojeg ćemo označiti U_i.

Nastavak dokaza tvrdnje (c)

Pretpostavimo induktivno da smo već konstruirali $\tilde{F}$ na $N \times [0, t_i]$.
Kako je $F(N \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$, prema $(*)$ postoji otvoren skup $\tilde{U}_i \subseteq \mathbb{R}$ kojeg p homeomorfno preslikava na U_i, t.d. je $\tilde{F}(y, t_i) \in \tilde{U}_i$.
Možemo postići da je $\tilde{F}(N \times \{t_i\}) \subseteq \tilde{U}_i$, jer ako nije onda zamijenimo $N \times \{t_i\}$ s presjekom $(N \times \{t_i\}) \cap \tilde{F}^{-1}(\tilde{U}_i)$ t.j. smanjimo N tako da bude $\tilde{F}(N \times \{t_i\}) \subseteq \tilde{U}_i$.
Sada možemo definirati $\tilde{F}$ i na $N \times [t_i, t_{i+1}]$ kao kompoziciju preslikavanja F i homeomorfizma $(p|\tilde{U}_i)^{-1} \colon U_i \to \tilde{U}_i$.
Nakon konačno mnogo koraka dobivamo podizanje $\tilde{F}_y \colon N_y \times I \to \mathbb{R}$ za neku okolinu $N_y \ni y$. ✓

Jedinstvenost podizanja u slučaju $Y = *$

Dokažimo sada jedinstvenost podizanja u specijalnom slučaju kada je Y samo jedna točka. U tom slučaju ne trebamo Y niti pisati, pa pretpostavimo da su $\tilde{F}, \tilde{F}' : I \to \mathbb{R}$ dva podizanja preslikavanja $F \colon I \to S^1$ t.d. je $\tilde{F}(0) = \tilde{F}'(0)$. Kao ranije, odaberimo $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ t.d. je za sve i, $F([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$.
Pretpostavimo induktivno da je $\tilde{F} = \tilde{F}'$ na $[0, t_i]$.
Zbog povezanosti, cijeli skup $\tilde{F}([t_i, t_{i+1}])$ mora ležati u jednom od disjunktnih otvorenih skupova $\tilde{U}_i$ koji se homeomorfno projiciraju na U_i.
Zbog istog razloga i jer je $\tilde{F}'(t_i) = \tilde{F}(t_i)$, mora biti i $\tilde{F}'([t_i, t_{i+1}]) \subseteq \tilde{U}_i$.
Kako je $p|\tilde{U}_i$ injekcija i $p \circ \tilde{F}' = p \circ \tilde{F}$, mora biti $\tilde{F}' = \tilde{F}$ na $[t_i, t_{i+1}]$, odakle indukcijom slijedi tražena jedinstvenost. ✓

Kraj dokaza tvrdnje (c) i teorema 8.1

Dakle, oko svake točke $y \in Y$ postoji okolina N_y i podizanje $\tilde{F}_y\colon N_y \times I \to \mathbb{R}$, i zbog dokazane jedinstvenosti, ta se podizanja podudaraju na $\{y\} \times I$ kad god je $y \in N_{y'} \cap N_{y''}$. Tako dobivamo dobro definirano jedinstveno podizanje $\tilde{F}$ na cijelom $Y \times I$.

Podizanje $\tilde{F}$ je neprekidno jer je neprekidno na svakom $N_y \times I$, a skupovi $N_y \times I$ su otvoreni i pokrivaju $Y \times I$. $\square$

Napomena: Preslikavanje $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definirano s $p(s) := (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$ iz dokaza teorema 8.1 obično se naziva ***eksponencijalno preslikavanje***. Naime, ako na $\mathbb{S}^1$ gledamo kao na jediničnu kružnicu u kompleksnoj ravnini, onda je $p(s) = e^{2\pi i s}$.

Primjena: osnovni teorem algebre

Teorem 9.2 (Osnovni teorem algebre)

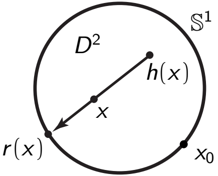
Svaki nekonstantni polinom s kompleksnim koeficijentima ima nultočku u $\mathbb{C}$.

Dokaz: Pretpostavimo da $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ nema nultočke u $\mathbb{C}$. Tada je za svaki $r \geqslant 0$ formulom $f_r^{(p)}(s) := \frac{p(r\,e^{2\pi i s})/p(r)}{|p(r\,e^{2\pi i s})/p(r)|}$, $s \in [0,1]$, definirana petlja u $\mathbb{S}^1$ bazirana u 1. Variranjem r unutar $[0, r]$ vidimo da su sve te petlje homotopne petlji $f_0^{(p)}$, koja je konstantna petlja u 1, pa je $[f_r^{(p)}] = 0 \in \pi_1(\mathbb{S}^1)$ za sve r.
Neka je $r > \max\{1, |a_1| + \cdots + |a_n|\}$. Tada za $|z| = r$ vrijedi
$|z^n| = r^n = r \cdot r^{n-1} > (|a_1| + \cdots + |a_n|)\,|z^{n-1}| \geqslant |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|$.
Zbog $|z^n| > |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|$, $p_t(z) := z^n + t(a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n)$ nema za $t \in [0,1]$ nultočaka na kružnici $|z| = r$. Familija $f_r^{(p_t)}$ je homotopija od petlje $f_r^{(p_0)}(s) = e^{2\pi i n s} = \omega_n(s)$ do $f_r^{(p)}$, pa je $[\omega_n] = [f_r^{(p)}] = 0$, tj. $n = 0$. $\square$

Primjena: Brouwerov teorem o fiksnoj točki u dimenziji 2

Teorem 9.3 (Brouwer ∼ 1910.)

Svako neprekidno preslikavanje $h\colon D^2 \to D^2$, dvodimenzionalnog diska D^2 u sama sebe, ima fiksnu točku.



Dokaz: Pretpostavimo da je $h(x) \neq x$ za sve $x \in D^2$. Neka je $r(x)$ presjek sa $\mathbb{S}^1 = \partial D^2$, zrake iz $h(x)$ kroz x. Time je definirana retrakcija* $r\colon D^2 \to \mathbb{S}^1$.

Pokažimo da takva retrakcija ne može postojati: Neka je f_0 bilo koja petlja u $\mathbb{S}^1$ bazirana u $x_0 \in \mathbb{S}^1$. U D^2 postoji homotopija petlje f_0 do konstantne petlje u x_0, pa će kompozicija retrakcije r s tom homotopijom dati homotopiju u $\mathbb{S}^1$ od f_0 do konstantnog preslikavanja u x_0, što bi značilo da je svaka petlja u $\mathbb{S}^1$ nulhomotopna (u $\mathbb{S}^1$), u kontradikciji s $\pi_1(\mathbb{S}^1) \neq 0$. $\square$

---

*Neka je $A \subseteq X$. Za neprekidno preslikavanje $r\colon X \to A$ kažemo da je ***retrakcija*** ako je $r|_A = \mathbb{1}_A$, tj. $r(x) = x$ za sve $x \in A$.

Primjena: Borsuk-Ulamov teorem u dimenziji 2

Teorem 9.4 (Borsuk-Ulam)

Za svako neprekidno preslikavanje $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{E}^2$ postoji par antipodnih točaka x i $-x$ t.d. je $f(x) = f(-x)$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $f(x) \neq f(-x)$ za sve x. Tada je s $g(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$ dobro definirano preslikavanje $g\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$. Petlja $\eta(s) := (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0)$ jednom obilazi ekvator od $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{E}^3$, i neka je $h := g \circ \eta\colon I \to \mathbb{S}^1$.
Zbog $g(-x) = -g(x)$ i $\eta(s + \frac{1}{2}) = -\eta(s)$, vrijedi

$$h(s+\tfrac{1}{2}) = g(\eta(s+\tfrac{1}{2})) = g(-\eta(s)) = -g(\eta(s)) = -h(s) \text{ za sve } s \in [0, \tfrac{1}{2}].$$

Neka je $\tilde{h}\colon I \to \mathbb{R}$ podizanje petlje h. Tada je $\tilde{h}(s + \frac{1}{2}) = \tilde{h}(s) + \frac{q}{2}$ za neki neparan broj q (jer se $\tilde{h}(s+\frac{1}{2})$ i $\tilde{h}(s)$ projiciraju u dijametralne točke).
Zbog neprekidnosti, q ne ovisi o s, pa je specijalno $\tilde{h}(1) = \tilde{h}(\frac{1}{2})+\frac{q}{2} = \tilde{h}(0)+q$.
Znači h predstavlja q-struki generator od $\pi_1(\mathbb{S}^1)$, a kako je q neparan, $h \not\simeq 0$.
Ali h je kompozicija $I \xrightarrow{\eta} \mathbb{S}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{S}^1$ i očito je $\eta \simeq 0$, pa mora biti $h \simeq 0$. □

Rastav sfere $\mathbb{S}^2$ na tri zatvorena skupa

Korolar 9.5 (Lusternik–Schnirelman–Borsuk)

Neka je $\mathbb{S}^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ gdje su skupovi A_1, A_2, A_3 zatvoreni. Tada barem jedan od njih sadrži par antipodnih točaka.

Dokaz: Za $x \in \mathbb{S}^2$ neka je $d_i(x) := d(x, A_i)$, $i = 1, 2, 3$.
Preslikavanje $x \mapsto f(x) := (d_1(x), d_2(x))$ je neprekidno preslikavanje $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{E}^2$ pa, prema Borsuk-Ulamovu teoremu, postoji x t.d. je $f(x) = f(-x)$, tj. $d_1(x) = d_1(-x)$ i $d_2(x) = d_2(-x)$.
Ako je jedan od tih brojeva jednak 0, onda x i $-x$ leže u $\overline{A_1} = A_1$ ili oba leže u $\overline{A_2} = A_2$.
Ako su pak oba broja pozitivna, onda niti x niti $-x$ ne leže niti u A_1 niti u A_2, pa oba moraju ležati u A_3. $\square$

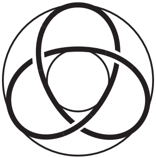
Fundamentalna grupa produkta

Propozicija 9.6

Ako su X i Y putevima povezani prostori onda je
$$\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y).$$

Dokaz: Svaka je petlja $f = (g, h)\colon I \to X \times Y$ ekvivalentna dvjema petljama: jednoj u X i jednoj u Y. Isto je tako svaka homotopija f_t petlji u $X \times Y$ ekvivalentna dvjema homotopijama petlji u X odnosno Y. Tako dobivamo bijekciju
$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$
danu s $[f] \mapsto ([g], [h])$, koja je očito izomorfizam grupa. $\square$

Primjer: Fundamentalna grupa torusa. Prema propoziciji je $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Paru $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ odgovara petlja $\omega_{pq} = (\omega_p, \omega_q)$ koja obilazi p puta oko jednog $\mathbb{S}^1$-faktora i q puta oko drugog. Ta petlja može biti i zauzlana, kao što pokazuje primjer $p = 3$, $q = 2$ na slici.



Inducirani homomorfizmi

Neka je $\varphi\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ preslikavanje punktiranih prostora. Tada φ ***inducira homomorfizam*** $\varphi_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ definiran s $\varphi_*([f]) := [\varphi\, f]$.

Preslikavanje φ_* dobro je definirano jer ako je $f_0 \overset{f_t}{\simeq} f_1$ onda je $\varphi\, f_0 \overset{\varphi f_t}{\simeq} \varphi\, f_1$, pa je $\varphi_*([f_0]) = [\varphi\, f_0] = [\varphi\, f_1] = \varphi_*([f_1])$.

Nadalje, φ_* je homomorfizam jer je $\varphi \circ (f \bullet g) = (\varphi \circ f) \bullet (\varphi \circ g)$, pa je $\varphi_*([f]\,[g]) = [\varphi \circ (f \bullet g)] = [(\varphi \circ f) \bullet (\varphi g)] = [\varphi \circ f]\,[\varphi \circ g] = \varphi_*([f])\, \varphi_*([g])$.

Direktno iz definicije slijedi

Propozicija 10.1 (Funktorijalnost)

(1) *Za kompoziciju* $(X, x_0) \xrightarrow{\varphi} (Y, y_0) \xrightarrow{\psi} (Z, z_0)$ *je* $(\psi\, \varphi)_* = \psi_*\, \varphi_*$.

(2) $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$, *tj. identiteta* $\mathbb{1}_X\colon X \to X$ *inducira identitetu* $\mathbb{1}_{\pi_1(X, x_0)}\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$. □

Drugim riječima $\pi_1\colon \mathbf{Top}_0 \to \mathbf{Gp}$ je (kovarijantan) funktor.

Fundamentalna grupa sfera

Odavde, tzv. „general nonsense" argumentacijom, slijedi

Korolar 10.2

Ako je $\varphi\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *homeomorfizam onda je* $\varphi_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ *izomorfizam.*
Specijalno, fundamentalna grupa je topološka invarijanta. □

Teorem 10.3

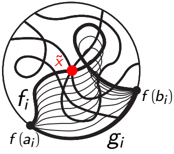
$$\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0 \text{ za } n \geqslant 2.$$

Dokaz: Neka je f petlja u $\mathbb{S}^n$ bazirana u točki $x_0 \in \mathbb{S}^n$. Ako f nije surjekcija, tj. ako postoji točka $x \neq x_0$ koja nije u slici petlje f, onda je f zapravo petlja u $\mathbb{S}^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{E}^n$ pa je nul-homotopna.

Dakle, kako bismo dokazali teorem, dovoljno je dokazati da je svaka petlja f homotopna nekoj petlji koja nije surjekcija.

„Odmicanje" petlje od neke točke

Neka je $\tilde{x} \neq x_0$ neka točka i $B \subseteq \mathbb{S}^n$ otvorena kugla oko $\tilde{x}$, dovoljno mala da ne sadrži x_0. Skup $f^{-1}(B)$ sastoji se od, možda beskonačne, familije *disjunktnih* intervala $\langle a_i, b_i \rangle$. Zbog kompaktnosti, $f^{-1}(\tilde{x})$ je sadržan u konačnoj uniji tih intervala. Neka je $\langle a_i, b_i \rangle$ jedan od njih, tj. $\langle a_i, b_i \rangle \cap f^{-1}(\tilde{x}) \neq \emptyset$, i neka je $f_i := f|[a_i, b_i]$.



Put f_i leži u $\overline{B}$ i njegove krajnje točke $f(a_i)$, $f(b_i)$ leže na ∂B. Za $n \geqslant 2$ je $\partial B \cong \mathbb{S}^{n-1}$ putevima povezan, pa neka je g_i put u $\partial B \subseteq \overline{B}$ od $f(a_i)$ do $f(b_i)$. Kako je $\overline{B} \cong D^n$, to je $g_i \simeq f_i$. Zamijenimo li f_i s g_i za sve i za koje je $\langle a_i, b_i \rangle \cap f^{-1}(\tilde{x}) \neq \emptyset$, dobit ćemo petlju u x_0 koja ne prolazi točkom $\tilde{x}$, dakle nije surjekcija, a homotopna je zadanoj petlji f. □

Primjer

Za bilo koju točku $x \in \mathbb{E}^n$ je $\mathbb{E}^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, pa je

$$\pi_1(\mathbb{E}^n \setminus \{x\}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^{n-1}) \times \pi_1(\mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}\,, & n = 2 \\ 0\,, & n > 2 \end{cases}.$$

$\mathbb{E}^2 \not\approx \mathbb{E}^n$ za $n \neq 2$

Kao posljedicu dobivamo ovaj „svakom jasan” ali netrivijalan rezultat:

Korolar 10.4

Za $n \neq 2$ prostori $\mathbb{E}^2$ i $\mathbb{E}^n$ nisu homeomorfni.

Dokaz: Pretpostavimo da postoji homeomorfizam $f\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^n$.
Tada je i restrikcija $f|_{\mathbb{E}^2\setminus\{0\}}\colon \mathbb{E}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{E}^n \setminus \{f(0)\}$ homeomorfizam.
Ali, za $n = 1$ prostor $\mathbb{E}^1 \setminus \{f(0)\}$ nije povezan, dok $\mathbb{E}^2 \setminus \{0\}$ jeste,
a za $n > 2$ je $\pi_1(\underbrace{\mathbb{E}^n \setminus \{0\}}_{\cong \mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}}) = 0$, dok je $\pi_1(\underbrace{\mathbb{E}^2 \setminus \{0\}}_{\cong \mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}) = \mathbb{Z}$. $\square$

Koristeći se višim homotopskim ili homološkim grupama, pokazuje se da je $\mathbb{E}^n \not\approx \mathbb{E}^m$ za $n \neq m$.

Štoviše, vrijedi tzv. *teorem o invarijanciji dimenzije* da neprazni otvoreni podskupovi od $\mathbb{E}^n$ i $\mathbb{E}^m$ mogu biti homeomorfni jedino kada je $n = m$.

Stupanj preslikavanja iz ravnine u ravninu

Neka je $U \subseteq \mathbb{E}^2$ otvoren podskup. Za neprekidno preslikavanje $f\colon U \to \mathbb{E}^2$ kažemo da je ***regularno*** u točki $a \in U$ ako postoji okolina $V \subseteq U$ oko točke a t.d. je $f(x) \neq f(a)$ za sve $x \in V \setminus \{a\}$.*
Neka je $R > 0$ t.d. je probušeni disk $D^* = \{x \in \mathbb{E}^2 : 0 < \|x - a\| < R\}$ sadržan u V. Tada je $f(D^*) \subseteq \mathbb{E}^2 \setminus \{f(a)\}$ pa f inducira homomorfizam $f_*\colon \pi_1(D^*) \to \pi_1\big(\mathbb{E}^2 \setminus \{f(a)\}\big)$.

Neka su $\gamma\colon [0,1] \to D^*$ i $\mu\colon [0,1] \to \mathbb{E}^2 \setminus \{f(a)\}$ petlje t. d. su $[\gamma]$ i $[\mu]$ generatori beskonačnih cikličkih grupa $\pi_1(D^*)$ i $\pi_1\big(\mathbb{E}^2 \setminus \{f(a)\}\big)$, t.j. $\pi_1(D^*) = \langle[\gamma]\rangle$ i $\pi_1\big(\mathbb{E}^2 \setminus \{f(a)\}\big) = \langle[\mu]\rangle$.

Kako je f_* homomorfizam grupa, postoji $d \in \mathbb{Z}$ t.d. je $f_*([\gamma]) = d\,[\mu]$. Broj d naziva se ***stupanj*** preslikavanja f u točki a, oznaka $d(f)_a$.

Nije teško pokazati da je definicija dobra, t.j. da ne ovisi o odabranom disku D niti o odabranim reprezentantima generatora $[\gamma]$ i $[\mu]$.

---

*Uoči da ovo *ne znači* injektivnost na V, već samo da se niti jedna točka iz $V \setminus \{a\}$ ne preslikava u $f(a)$!

Multiplikativnost stupnja preslikavanja

Neposredno iz definicije slijedi

Propozicija 11.1

Ako je preslikavanje f regularno u točki a i g je regularno u točki $f(a)$, onda je $g \circ f$ regularno u a i vrijedi $d(g \circ f)_a = d(g)_{f(a)} \cdot d(f)_a$. $\square$

Potprostor $\Gamma \subseteq \mathbb{E}^2$ koji je homeomorfan kružnici naziva se ***jednostavno zatvorena krivulja***. Važna je sljedeća činjenica:

Teorem 11.2 (Jordanov teorem o jednostavno zatvorenoj krivulji)

*Svaka jednostavno zatvorena krivulja $\Gamma \subseteq \mathbb{E}^2$ dijeli ravninu na dva otvorena povezana skupa (područja), i Γ im je zajednički rub. Jedno od tih područja je omeđen skup (zovemo ga **unutarnje područje**), a drugo je neomeđen skup.*

Iako je iskaz Jordanova teorema intuitivno vrlo prihvatljiv, dokaz nije jednostavan (vidi npr. [Munkres]).

Teorem o invarijanciji domene

Trebat će nam sljedeća slaba verzija teorema o invarijanciji domene u dimenziji 2:

Teorem 11.3 (Brouwer)

Neka je $U \subseteq \mathbb{E}^2$ otvoren podskup a $h\colon U \to \mathbb{E}^2$ smještenje, t.j. $h\colon U \to h(U)$ je homeomorfizam, pri čemu $h(U)$ ima topologiju potprostora od $\mathbb{E}^2$. Tada je skup $h(U)$ otvoren u $\mathbb{E}^2$.

Dokaz: Neka je $y \in h(U)$ proizvoljna točka, $x \in U$ t.d. je $h(x) = y$, i neka je D otvoren disk oko x t.d. je $\overline{D} \subseteq U$. Rub ∂D je kružnica, pa, jer je restrikcija $h|_{\overline{D}}\colon \overline{D} \to h(\overline{D})$ homeomorfizam, $h(\partial D)$ je jednostavno zatvorena krivulja u $\mathbb{E}^2$. Prema Jordanovom teoremu 11.2, unutarnje područje određeno s $h(\partial D)$ je otvoren skup.
Ali ovo unutarnje područje je upravo $h(D)$, i to je otvoren skup u $\mathbb{E}^2$, pa, jer je $\overline{D} \subseteq U$, to je $y = h(x) \in h(D) \subseteq h(\overline{D}) \subseteq h(U)$, pa je $h(D)$ otvorena okolina od y sadržana u $h(U)$, tj. $h(U)$ je otvoren skup. $\square$

Teorem o invarijanciji domene u dimenziji 2

Poboljšanje prethodnog Brouwerovog teorema je sljedeći:

Teorem 11.4 (Teorem o invarijanciji domene)

Neka je $U \subseteq \mathbb{E}^2$ otvoren podskup a $h\colon U \to \mathbb{E}^2$ neprekidna injekcija. Tada je h smještenje, tj. $h\colon U \to h(U)$ je homeomorfizam (pri čemu $h(U)$ ima topologiju potprostora od $\mathbb{E}^2$), i skup $h(U)$ je otvoren u $\mathbb{E}^2$.

Dokaz: Dovoljno je vidjeti da je h otvoreno preslikavanje. Neka je $V \subseteq U$ otvoren podskup, $y \in f(V)$ neka točka, $x \in V$ t.d. je $f(x) = y$, i D otvoren disk oko x t.d. je $\overline{D} \subseteq V$. Zbog kompaktnosti i injektivnosti je restrikcija $h|_{\overline{D}}\colon \overline{D} \to h(\overline{D})$ homeomorfizam, a kako je rub ∂D kružnica, to je $h(\partial D)$ jednostavno zatvorena krivulja u $\mathbb{E}^2$.
Prema Jordanovom teoremu 11.2, unutarnje područje određeno s $h(\partial D)$ je otvoren skup. Ali ovo unutarnje područje je upravo $h(D) \subseteq h(V)$, i to je otvoren skup u $\mathbb{E}^2$, pa je skup $h(V)$ otvoren, tj. h je otvoreno preslikavanje. $\square$

Stupanj homeomorfizma

Homeomorfizam je očito regularno preslikavanje u svakoj točki. Vrijedi

Teorem 11.5

Neka je $U \subseteq \mathbb{E}^2$ otvoren povezan skup, i h homeomorfizam s U na $h(U) \subseteq \mathbb{E}^2$. Tada je u svim točkama $a \in U$ stupanj $d(h)_a$ jednak 1 ili je u svim točkama jednak -1.

Dokaz: Prema Brouwerovom teoremu 11.3, $h(U)$ je otvoren skup, pa je za inverzni homeomorfizam $h^{-1} \colon h(U) \to U$ definiran stupanj u točki $h(a)$. Zbog multiplikativnosti stupnja preslikavanja, propozicija 11.1, je $d(h^{-1})_{h(a)} \cdot d(h)_a = d(\mathbb{1}_U)_a$. Međutim, stupanj identitete je očito jednak 1, pa je stupanj $d(h)_a$ jednak ili 1 ili -1.

Konstantnost stupnja slijedi iz povezanosti od U i činjenice da je h homeomorfizam (oko toga ima ipak malo posla). $\square$

Orijentacija planarnih područja na plohi

Za otvoren povezan podskup U plohe M kažemo da je ***planarno područje*** na M, ako postoji homeomorfizam $\varphi\colon U \to \Omega$ s U na neko područje, tj. otvoren povezan podskup, $\Omega \subseteq \mathbb{E}^2$.
Za homeomorfizme $\varphi_1\colon U \to \Omega_1$ i $\varphi_2\colon U \to \Omega_2$ kažemo da su ekvivalentni ako je stupanj kompozicije $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ jednak 1.
Postoje točno dvije klase ekvivalencije. Zaista, ako je $\overline{\varphi}\colon U \to \overline{\Omega}$ kompozicija homeomorfizma $\varphi\colon U \to \Omega$ i zrcaljenja s obzirom na prvu koordinatnu os (konjugiranje), tada je stupanj kompozicije $\overline{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ jednak -1, pa φ i $\overline{\varphi}$ pripadaju različitim klasama, i svaki drugi takav homeomorfizam je ekvivalentan ili s φ ili s $\overline{\varphi}$.

Izbor jedne od dviju klasa ekvivalencije je *orijentacija* područja U.
Orijentacija područja U inducira (restrikcijom) orijentaciju na svakom potpodručju $V \subseteq U$, a za orijentacije planarnih područja U_1 i U_2 kažemo da su *kompatibilne* ako induciraju iste orijentacije na svim potpodručjima presjeka $U_1 \cap U_2$.*

*Presjek povezanih skupova ne mora biti povezan!

Orijentabilnost ploha

Sada, konačno, možemo definirati orijentabilnost ploha:

Definicija 11.6

Za plohu kažemo da je ***orijentabilna*** ako se svako njezino planarno područje može orijentirati tako da su orijentacije svaka dva područja kompatibilne.

Homeomorfizmi očito čuvaju orijentabilnost. Stoga postoje dvije klase ploha: orijentabilne i neorijentabilne. Orijentabilna ploha ima točno dvije orijentacije.

Kako bi se orijentirala orijentabilna ploha, dovoljno je kompatibilno orijentirati sve članove nekog pokrivača planarnim područjima.

Definicija 11.7

Za triangulirani 2-kompleks K bez ruba (vidi teorem 6.3) kažemo da je ***orijentabilan*** ako je njegova geometrijska realizacija $|K|$ orijentabilna ploha.

5 HOMOLOŠKE GRUPE

- Konačno generirane abelovske grupe
- Simplicijalna homologija
- Homološke grupe kompaktnih 2-dimenzionalnih poliedara

U ovom ćemo poglavlju upoznati još jednu, zapravo čitav niz topoloških invarijanata — homološke grupe. Bavit ćemo se *simplicijalnim homološkim grupama*, koje su prilagođene simplicijalnim kompleksima, a *singularne homološke grupe* ćemo samo spomenuti u vezi topološke invarijantnosti homoloških grupa.

Prednost homoloških grupa pred fundamentalnom grupom je činjenica da su homološke grupe abelovske* i, često, lako izračunljive. U tu svrhu ponovimo neke činjenice o konačno generiranim abelovskim grupama.†

*Kod nas se najčešće kaže *Abelova* grupa, ali je ispravno *abelovska* grupa; isto kao što kažemo *euklidski* prostor a ne *Euklidov* prostor (a i engleski je *abelian* group, a ne *Abel's* group).

†U ovom će poglavlju sve grupe biti abelovske, pa nekada to nećemo posebno naglašavati.

Abelovske grupe

Abelovska ili ***komutativna grupa*** $(G, +)$ je skup G s binarnom operacijom $+\colon G \times G \to G$ (zovemo ju zbrajanje), koja ima ova svojstva:

asocijativnost: $\forall a, b, c \in G$ vrijedi $a + (b + c) = (a + b) + c$

neutralni element: $\exists 0 \in G$ t.d. $\forall a \in G$ vrijedi $a + 0 = 0 + a = a$

postojanje inverza: $\forall a \in G$, $\exists(-a) \in G$ t.d. je $a + (-a) = (-a) + a = 0$

komutativnost: $\forall a, b \in G$ vrijedi $a + b = b + a$.

Za $n \in \mathbb{Z}$ i $a \in G$ definira se $n \cdot a := \begin{cases} \underbrace{a + \cdots + a}_{n \text{ sumanada}} & , n > 0 \\ 0 & , n = 0 \\ -\underbrace{(a + \cdots + a)}_{|n| \text{ sumanada}} & , n < 0 \end{cases}.$

Lako se pokazuje da za ovako definiranu funkciju $(n, a) \mapsto na$ sa $\mathbb{Z} \times G \to G$ vrijedi:

$$(m + n)a = ma + na \qquad n(a + b) = na + nb$$
$$(mn)a = m(na) \qquad 1a = a$$

pa su abelovske grupe isto što i $\mathbb{Z}$-moduli.

Konačno generirane i slobodne abelovske grupe

Definicija: Za podskup $A = \{a_j : j \in J\}$ abelovske grupe G kažemo da ***generira*** G ako za svaki $g \in G$ postoje $a_1, \dots, a_k \in A$ i $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ t.d. je $g = \sum_{j=1}^{k} n_j a_j$. Pisat ćemo $\boldsymbol{G = \langle A \rangle}$.

Ako postoji konačan skup koji generira G onda kažemo da je grupa G ***konačno generirana***.

Prikaz $g = \sum_{j=1}^{k} n_j a_j$, $a_j \in A$, $n_j \in \mathbb{Z}$, općenito nije jedinstven, ali ako postoji podskup $A \subseteq G$ za koji je takav prikaz jedinstven, onda se kaže da je G ***slobodna abelovska grupa***, a za skup A kaže se da je ***baza*** grupe G. Pokazuje se da sve baze slobodne abelovske grupe G imaju istu kardinalnost, i ona se naziva ***dimenzijom*** grupe G.

Kao za vektorske prostore, slobodne abelovske grupe imaju sljedeće ***univerzalno svojstvo***: Neka je A baza slobodne abelovske grupe G i $f : A \to H$ funkcija u proizvoljnu abelovsku grupu H. Tada postoji jedinstven homomorfizam grupa $\hat{f} : G \to H$ koji ***proširuje*** f, tj. takav da je $\hat{f}(g) = f(g)$ za sve $g \in A$.

Konstrukcija slobodne abelovske grupe nad nekim skupom

Neka je $A = \{a_j : j \in J\}$ neki skup i neka je $F(A)$ skup svih funkcija $\varphi\colon A \to \mathbb{Z}$ t.d. je $\varphi(a) \neq 0$ za samo konačno mnogo elemenata $a \in A$.

Zbrajanje u $F(A)$ definiramo *po točkama*: $(\varphi+\psi)(a) := \varphi(a)+\psi(a)$, i time $F(A)$ postaje abelovska grupa. Njezini elementi imaju jedinstven prikaz kao konačne sume $\varphi = \sum_{j=1}^{k} n_j\varphi_j$, $n_j \in \mathbb{Z}$, gdje su $\varphi_j\colon A \to \mathbb{Z}$ funkcije definirane s $\varphi_j(x) = \begin{cases} 1\,, & x=a_j \\ 0\,, & x\neq a_j \end{cases}$, pa je $F(A)$ slobodna abelovska grupa s bazom $\{\varphi_j : j \in J\}$.

Identificiramo li $a_j \in A$ s funkcijom φ_j, $F(A)$ postaje slobodna abelovska grupa s bazom A, a njezini elementi su formalne konačne sume $\sum_{j=1}^{k} n_j a_j$, $n_j \in \mathbb{Z}$, $a_j \in A$.

Nije teško vidjeti da je slobodna abelovska grupa $F(A)$ generirana* skupom $A = \{a_j : j \in J\}$ izomorfna direktnoj sumi $\bigoplus_{j\in J} Z_j$, gdje je $Z_j = \mathbb{Z}$ za sve $j \in J$ (piše se $F(A) \cong \bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z}$).

---

*Kada kažemo da je slobodna abelovska grupa G generirana skupom A, to će uvijek značiti da je A baza, tj. da je G slobodno generirana skupom A.

Torziona podgrupa

Za element a abelovske grupe G kažemo da je ***konačnog reda*** ako postoji $n \in \mathbb{N}$, $(n \neq 0)$, t.d. je $na = 0$. Najmanji takav n naziva se ***red*** elementa a. Lako se vidi da je podskup $T(G) \subseteq G$ svih elemenata konačnog reda podgrupa grupe G, i naziva se ***torziona podgrupa***. Ako je $T(G) = \{0\}$ kaže se da grupa G nema torzije.

Očito je torziona podgrupa bilo koje konačne abelovske grupe, cijela grupa.

S druge strane, svaka slobodna abelovska grupa je bez torzije, ali ne vrijedi obratno, tj. nije svaka abelovska grupa bez torzije slobodna. Naprimjer, aditivna grupa $(\mathbb{Q}, +)$ racionalnih brojeva nema torzije ali nije slobodna. Zaista, očito je da jedan racionalan broj nije dovoljan da generira $\mathbb{Q}$. Neka su $\frac{p}{q}$ i $\frac{p'}{q'}$ dva različita, do kraja skraćena razlomka. Tada je

$$\underbrace{p'q}_{\in\mathbb{Z}}\frac{p}{q} + (\underbrace{-pq'}_{\in\mathbb{Z}})\frac{p'}{q'} = p'p - pp' = 0$$

pa $\frac{p}{q}$ i $\frac{p'}{q'}$ ne mogu biti elementi neke baze za $\mathbb{Q}$.

Rang abelovske grupe

Za podskup $A \subseteq G$ abelovske grupe G kažemo da je ***linearno nezavisan*** ako je za svaki konačan podskup $\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq A$ jednakost $\sum_{j=1}^{k} n_j a_j = 0$, $n_j \in \mathbb{Z}$, moguća jedino za $n_1 = \cdots = n_k = 0$. Najveća kardinalnost linearno nezavisnih podskupova grupe G naziva se ***rangom*** grupe G, $\mathbf{r}(G)$.

Rang slobodne abelovske grupe jednak je njezinoj dimenziji.

Ako je svaki element abelovske grupe G konačnog reda, posebno ako je grupa G konačna, onda je $\mathrm{r}(G) = 0$.

Lako se vidi da je $\mathrm{r}(G \oplus H) = \mathrm{r}(G) + \mathrm{r}(H)$.

Struktura konačno generiranih abelovskih grupa

Navest ćemo, bez dokaza, dva ključna teorema o konačno generiranim abelovskim grupama.

Teorem 12.1

Neka je G konačno generirana abelovska grupa. Tada:

(i) *G je izomorfna konačnoj direktnoj sumi cikličkih* grupa.*

(ii) *Postoji jedinstven $r \in \mathbb{N}$ t.d. je broj beskonačnih cikličkih grupa u svakoj dekompoziciji grupe G u direktnu sumu cikličkih grupa, jednak r.*

Dakle, ako je G konačno generirana slobodna abelovska grupa, onda postoji jedinstven $r \in \mathbb{N}$ t.d. je $G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r \text{ sumanada}}$.

*Beskonačna ciklička grupa je grupa izomorfna aditivnoj grupi $(\mathbb{Z}, +)$, a konačne cikličke grupe su grupe izomorfne kvocijentnoj grupi $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ za neki $m \in \mathbb{N}$. Najčešće oznake za grupu $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ su $\mathbb{Z}_m$ ili, danas češće, $\mathbb{Z}/m$.

Strukturni teorem za konačno generirane abelovske grupe

O strukturi konačno generiranih abelovskih grupa govori sljedeći teorem.

Teorem 12.2 (Strukturni teorem za konačno generirane abelovske grupe)

Neka je G konačno generirana abelovska grupa.

(*i*) *Ili je G slobodna abelovska grupa pa postoji jedinstven $r \in \mathbb{N}$ t.d. je $G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r \text{ sumanada}}$, ili postoje jedinstven cijeli broj $r \geqslant 0$ i jedinstveni prirodni brojevi $m_1, \ldots, m_k$, $m_1 > 1$, $m_1 \mid m_2 \mid \cdots \mid m_k$, t.d. je $G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r \text{ sumanada}} \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$.*

(*ii*) *Ili je G slobodna abelovska grupa pa postoji jedinstven $r \in \mathbb{N}$ t.d. je $G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r \text{ sumanada}}$, ili postoje jedinstven cijeli broj $r \geqslant 0$, jedinstveni prosti brojevi $p_1, \ldots, p_\ell$ i jedinstveni prirodni brojevi $n_1, \ldots, n_\ell$, t.d. je $G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r \text{ sumanada}} \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_\ell^{n_\ell}}$.*

Napomena: Brojevi $m_1, \ldots, m_k$ nisu nužno različiti. Isto vrijedi za $p_1, \ldots p_\ell$ i za $n_1, \ldots, n_\ell$.

Nekoliko komentara uz strukturni teorem

Strukturni teorem pokazuje da je svaka konačno generirana abelovska grupa G izomorfna direktnoj sumi $\mathbb{Z}^r \oplus T(G)$, a torziona se podgrupa $T(G)$ može na dva jedinstvena načina zapisati kao

$$T(G) \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}, \quad m_1 > 1,\ m_1 \,|\, m_2 \,|\cdots|\, m_k$$

i kao

$$\cong \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_\ell^{n_\ell}}$$

pri čemu su brojevi r, k, ℓ, $m_1, \ldots, m_k$, $p_1, \ldots, p_\ell$ i $n_1, \ldots, n_\ell$ jedinstveno određeni grupom G.

Brojevi $m_1, \ldots, m_k$ nazivaju se ***torzioni koeficijenti*** ili ***invarijantni faktori*** grupe G, a potencije prostih brojeva $p_1^{n_1}, \ldots, p_\ell^{n_\ell}$ su njezini ***elementarni divizori***.

Broj r, dimenzija slobodnog sumanda $\mathbb{Z}^n$ grupe G, jednak je rangu grupe G, i naziva se ***Bettijev broj*** grupe G.

O rangu grupe, podgrupe i kvocijenta

Trebat će nam sljedeći teorem o rangu grupe, podgrupe i kvocijenta:

Teorem 12.3

Neka je G abelovska grupa konačnog ranga, a H njezina podgrupa. Tada je $\mathrm{r}(G) = \mathrm{r}(H) + \mathrm{r}(G/H)$.

Dokaz je *straightforward*
(vidi npr. Lars V. Ahlfors and Leo Sario. *Riemann Surfaces*, Princeton Math. Series, No. 2, Princeton University Press, 1960, p. 51).

Korolar 12.4

Neka je $0 \to E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \to 0$ ***kratki egzaktni niz**** *abelovskih grupa, i F je konačnog ranga. Tada je* $\mathrm{r}(F) = \mathrm{r}(E) + \mathrm{r}(G)$. $\square$

*To znači da je f monomorfizam, g epimorfizam i $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

Orijentirani simpleksi

Svakom ćemo simplicijalnom kompleksu K pridružiti niz abelovskih grupa $H_n(K)$. Pokazuje se da su te, homološke grupe topološke invarijante, t.j. da ovise samo o geometrijskoj realizaciji $|K|$ kompleksa K.

Za homologiju će biti važan redoslijed vrhova u simpleksu, tj. orijentacija. Neka je n-simpleks σ razapet vrhovima $\alpha_0, \dots, \alpha_n$. Dva redoslijeda vrhova smatrat ćemo ekvivalentnim ako se razlikuju za parnu permutaciju, a σ zajedno s jednom od dviju klasa ekvivalencije, zvat ćemo ***orijentirani simpleks*** i označivat ćemo ga $\sigma = [\alpha_0, \dots, \alpha_n]$.

Za orijentirani simpleks $\sigma = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, isti je geometrijski simpleks ali sa suprotnom orijentacijom jednak $-\sigma = [\alpha_1, \alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$.

Ako je $\sigma = [\alpha_0, \dots, \alpha_n]$ orijentirani simpleks onda je i svaka stranica $\sigma' \leqslant \sigma$ orijentirana na usklađen način. Ovako orijentirana stranica nasuprot vrhu α_j je $[\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha}_j, \dots, \alpha_n] := [\alpha_0, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n]$.

Odsada će svi simpleksi biti orijentirani pa to najčešće nećemo posebno naglašavati.

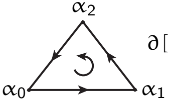
Simplicijalni lanci

Za simplicijalni kompleks K neka je $\boldsymbol{C_n(K)}$ slobodna abelovska grupa kojoj bazu čine svi orijentirani n-simpleksi u K. Elemente grupe $C_n(K)$ zovemo ***n-lanci*** i zapisujemo ih kao sume $\zeta = \sum_{j \in J} n_j \, \sigma j$. Na koeficijent n_j uz σ_j često je dobro gledati i kao na $\zeta(\sigma_j)$, t.j. kao na vrijednost lanca ζ na simpleksu σ_j.

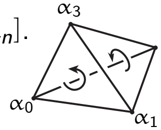
Rub simpleksa $[\alpha_0, \ldots, \alpha_n]$ sastoji se od svih stranica $[\alpha_0, \ldots, \widehat{\alpha_k}, \ldots, \alpha_n]$.

Pokazalo se da je za rub korisnije umjesto sume uzeti alterniranu sumu $\sum_k (-1)^k [\alpha_0, \ldots, \widehat{\alpha_k}, \ldots, \alpha_n]$.

$\partial[\alpha_0, \alpha_1] = [\alpha_1] - [\alpha_0]$



$\partial[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] = [\alpha_1, \alpha_2] - [\alpha_0, \alpha_2] + [\alpha_0, \alpha_1]$



$$\partial[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] - [\alpha_0, \alpha_2, \alpha_3] + [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3] - [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$$

Homomorfizam ruba

Homomorfizam ruba $\partial_n\colon C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ je za $n \geqslant 1$ zadan na bazi* formulom

$$\partial_n([\alpha_0, \dots, \alpha_n]) := \textstyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k [\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha_k}, \dots, \alpha_n],$$

a za $n = 0$ je $\partial_0\colon C_0(K) \to 0 =: C_{-1}(K)$ nul-homomorfizam.

Lema 13.1 (osnovno svojstvo homomorfizma ruba)

Kompozicija $C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2}(K)$ *je nul-homomorfizam.*

Dokaz: $\partial_n(\sigma) = \partial_n([\alpha_0, \dots, \alpha_n]) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k [\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha_k}, \dots, \alpha_n]$

pa je
$$\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = \sum_{\ell<k} (-1)^k (-1)^\ell [\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha_\ell}, \dots, \widehat{\alpha_k}, \dots, \alpha_n]$$
$$+ \sum_{\ell>k} (-1)^k (-1)^{\ell-1} [\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha_k}, \dots, \widehat{\alpha_\ell}, \dots, \alpha_n].$$

Zamijenimo li u drugom sumandu $k \leftrightarrow \ell$, sumandi se pokrate. □

*Homomorfizam ∂_n dovoljno je zadati na bazi jer je $C_n(K)$ slobodna abelovska grupa.

Homologija lančanog kompleksa

Niz abelovskih grupa i homomorfizama

$$\mathscr{C} \qquad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

t.d. je $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ za sve n, naziva se ***lančani kompleks***.

Elementi podgrupe $\operatorname{Ker} \partial_n \subseteq C_n$ nazivaju se ***n-ciklusi*** a elementi podgrupe $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subseteq C_n$ ***n-rubovi***, a zbog $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ je $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker} \partial_n$.

Kvocijentna grupa $H_n := \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ naziva se ***n-ta homološka grupa*** lančanog kompleksa $\mathscr{C}$. Elementi od H_n nazivaju se ***homološke klase***, oznaka $[\![z]\!]$, $z \in \operatorname{Ker} \partial$, a za dva ciklusa ζ i ζ' koji pripadaju istoj klasi kaže se da su ***homologni***, i pišemo $\zeta \sim \zeta'$.

Za simplicijalni kompleks K, homološke grupe lančanog kompleksa

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(K) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

nazivamo ***simplicijalnim homološkim grupama*** od K, oznaka $H_n(K)$, ili, jednostavno, homološkim grupama od K.

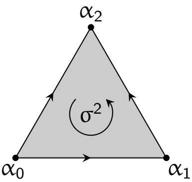
Rang $\operatorname{r}\big(H_n(K)\big)$ naziva se ***n-ti Bettijev broj*** kompleksa K.

Dogovor: Zbog preglednosti, najčešće ćemo pisati samo ∂ (bez indeksa).

Primjer 1

Primjer 13.2

$$H_n(\sigma^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}\,, & n = 0 \\ 0\,, & n \geqslant 1 \end{cases}$$



$C_0(\sigma^2) = \operatorname{Ker} \partial_0 = \langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, ali su svaka dva 0-simpleksa (vrha) homologna, jer je njihova razlika rub odgovarajućeg brida (1-simpleksa). Stoga je $H_0(\sigma^2) \cong \mathbb{Z}$.

$\partial\big(n_0[\alpha_0, \alpha_1] + n_1[\alpha_1, \alpha_2] + n_2[\alpha_0, \alpha_2]\big)$

$= n_0\alpha_1 - n_0\alpha_0 + n_1\alpha_2 - n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 - n_2\alpha_0$

$= -(n_0 + n_2)\alpha_0 + (n_0 - n_1)\alpha_1 + (n_1 + n_2)\alpha_2$,

pa je to jednako 0 samo za $n_2 + n_0 = n_0 - n_1 = n_1 + n_2 = 0$, tj. za $n_0 = n_1 = -n_2$. Dakle, jedini 1-ciklusi su cjelobrojni višekratnici ciklusa $\zeta = [\alpha_0, \alpha_1] + [\alpha_1, \alpha_2] - [\alpha_0, \alpha_2]$, pa je $\operatorname{Ker} \partial_1 \cong \mathbb{Z}$.

Ali, kako je $\partial\sigma^2 = \zeta$, to je $\operatorname{Im} \partial_2 = \operatorname{Ker} \partial_1$, pa je $H_1(\sigma^2) = 0$.

Nadalje, $\partial\sigma^2 = \zeta \neq 0$, pa je $\operatorname{Ker} \partial_2 = 0$, te je i $H_2(\sigma^2) = 0$.

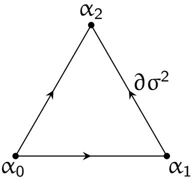
Konačno, u dimenzijama $\geqslant 3$ nema ničega, pa je $H_n(\sigma^2) = 0$ za $n \geqslant 3$.

Primjer 2

Primjer 13.3

$$H_n(\partial\sigma^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}\,, & n = 0 \text{ i } n = 1 \\ 0\,, & n \geqslant 2 \end{cases}$$

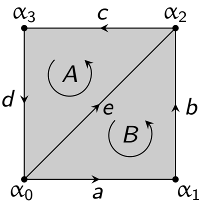
Kao i u prethodnom primjeru, pokazuje se da je $H_0(\partial\sigma^2) \cong \mathbb{Z}$ i $H_n(\partial\sigma^2) = 0$ za $n \geqslant 2$.
Isto se tako, kao u prethodnom primjeru vidi da su jedini 1-ciklusi cjelobrojni višekratnici ciklusa $\zeta = [\alpha_0, \alpha_1] + [\alpha_1, \alpha_2] - [\alpha_0, \alpha_2]$, tj. $\operatorname{Ker} \partial_1 = \langle \zeta \rangle \cong \mathbb{Z}$.
Kako u dimenziji 2 nema ničega, to je $\operatorname{Im} \partial_2 = 0$, pa je $H_1(\partial\sigma^2) = \operatorname{Ker} \partial_1 \cong \mathbb{Z}$.



Primjer 3

Primjer 13.4

$$H_n(\text{kvadrat}) = \begin{cases} \mathbb{Z}\,, & n = 0 \\ 0\,, & n \geqslant 1 \end{cases}$$



Kao i ranije zaključujemo da je $H_0 \cong \mathbb{Z}$ i $H_{n\geqslant 3} = 0$.
Nadalje, $C_2 = \langle A, B\rangle$, pa je
$\partial(mB+nA) = ma+mb+nc+nd+(n-m)e = 0$ samo za $m = n = 0$. Stoga je $\operatorname{Ker}\partial_2 = 0$, te je i $H_2 = 0$.

Odredimo H_1: $\partial(\overbrace{n_1 a + n_2 b + n_3 c + n_4 d + n_5 e}^{\zeta})$
$= n_1\alpha_1 - n_1\alpha_0 + n_2\alpha_2 - n_2\alpha_1 + n_3\alpha_3 - n_3\alpha_2 + n_4\alpha_0 - n_4\alpha_3 + n_5\alpha_2 - n_5\alpha_0$
$= (n_4 - n_1 - n_5)\alpha_0 + (n_1 - n_2)\alpha_1 + (n_2 - n_3 + n_5)\alpha_2 + (n_3 - n_4)\alpha_3$
pa je $\partial\zeta = 0$ za $n_1 = n_2$, $n_3 = n_4$ i $n_5 = n_3 - n_2 = n_4 - n_1 = n_3 - n_1$,
tj. $\zeta = n_1(a+b) + n_3(c+d) + (n_3 - n_1)e = n_1\partial B + n_3\partial A$.
Dakle, svaki 1-ciklus je rub, pa je $H_1 = 0$.

$H_n(K)$ za $n > \dim K$ i $H_0(K)$ za povezane komplekse K

Ako je K k-dimenzionalan simplicijalan kompleks, t.j. u K nema simpleksa dimenzija $n > k$ (iznad dimenzije k „nema ničega"), onda je $C_n(K) = 0$, pa je i $H_n(K) = 0$, za sve $n > k$.

Kao i u prethodnim primjerima pokaže se da je $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ za sve povezane simplicijalne komplekse K. Naime, neka su α i β dva različita vrha u K. Zbog povezanosti, postoje bridovi (1-simpleksi) $[\alpha, \alpha_1], [\alpha_1, \alpha_2], \ldots, [\alpha_k, \beta]$ u K koji „povezuju" α i β, i $\partial\big([\alpha, \alpha_1] + [\alpha_1, \alpha_2] + \cdots + [\alpha_k, \beta]\big) = \beta - \alpha$, t.j. svaka dva 0-simpleksa α i β su homologni. Stoga je $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

Vrijedi, dakle:

Teorem 13.5

Neka je K povezan k-dimenzionalan simplicijalni kompleks. Tada je $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ i $H_n(K) = 0$ za sve $n > k$.

Prečica

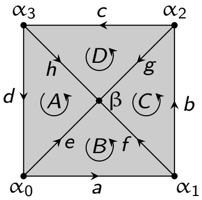
Pri određivanju grupe $H_0(K)$ povezanog kompleksa K, nismo se služili originalnom definicijom $H_0(K) = \operatorname{Ker} \partial_0 / \operatorname{Im} \partial_1$. Nismo najprije odredili grupe $\operatorname{Ker} \partial_0$ svih 0-ciklusa i $\operatorname{Im} \partial_1$ svih 0-rubova, pa napravili njihov kvocijent. Naime, svaki 0-lanac je ciklus jer je $\partial_0 = 0$, t.j. ∂_0 je nul-homomorfizam, pa je grupa $\operatorname{Ker} \partial_0$ velika, to je slobodna abelovska grupa s onoliko generatora koliko K ima vrhova, a i njezina podgrupa $\operatorname{Im} \partial_1$, 0-rubova, je velika.
Umjesto toga, direktno smo odredili homološke klase 0-ciklusa, i, kako je K bio povezan, pokazalo se da su svi 0-ciklusi međusobno homologni, pa svaki vrh, kao 0-ciklus, reprezentira isti generator grupe $H_0(K)$.

Slično možemo napraviti i pri određivanju viših homoloških grupa, i takav ćemo postupak zvati ***prečica***.

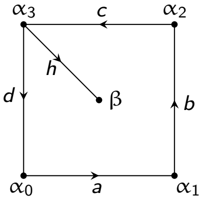
Ilustrirajmo to sljedećim primjerom.

Primjer 4: homologija kvadrata — drugi put

Kažemo da je potkompleks L ***nosač*** lanca ζ, ili da ζ ***živi*** na L, ako je vrijednost od ζ na simpleksima koji ne pripadaju L jednaka 0, t.j. simpleksi izvan L se ne pojavljuju kao sumandi u ζ.



Promotrimo kvadrat K trianguliran kao na gornjoj slici. Neka je ζ 1-lanac, $\zeta(e) = m$, i neka je $\zeta_1 = \zeta + \partial(mB)$. ζ_1 i ζ su homologni, i $\zeta_1(e) = 0$, t.j. ζ smo zamijenili homolognim lancem ζ_1 u kojem se ne pojavljuje brid e. Neka je $\zeta_1(f) = n$, i neka je $\zeta_2 = \zeta_1 + \partial(nC)$. Tada je $\zeta_2(f) = \zeta_2(e) = 0$ i $\zeta_2 \sim \zeta_1 \sim \zeta$. Analogno, za lanac $\zeta_3 = \zeta_2 + \partial(pD)$, gdje je $p = \zeta_2(g)$, vrijedi $\zeta_3(g) = \zeta_3(f) = \zeta_3(e) = 0$, i $\zeta_3 \sim \zeta$.



Tako smo 1-lanac ζ zamijenili homolognim lancem ζ_3 koji živi na potkompleksu L prikazanom na donjoj slici. Ako je ζ ciklus onda mora biti $\zeta_3(h) = 0$ (inače bi bilo $\partial\zeta_3(\beta) \neq 0$). Dakle, svaki 1-ciklus je homologan 1-ciklusu koji živi na rubu kvadrata.

Nastavak

Kao i u primjeru 13.2 pokazuje se da svaki 1-ciklus koji živi na rubu kvadrata mora biti višekratnik ciklusa $a+b+c+d$, a taj je ciklus nul-homologan jer je jednak $\partial(A+B+C+D)$, pa je $H_1(K)=0$.

(Primijeti da $a+b+c+d$ *nije* nul-homologan kao ciklus u L!)

Kao u primjerima 13.2 i 13.4 vidi se da je 2-lanac $mA+nB+pC+qD$ ciklus jedino za $m=n=p=q=0$ (kako bi se koeficijenti uz 1-simplekse e, f, g i h pokratili), pa je $H_2(K)=\operatorname{Ker}\partial_2=0$.

Zbog povezanosti je $H_0(K)\cong\mathbb{Z}$, a $H_{n\geqslant 3}(K)=0$ jer je $\dim K=2$.

Orijentaciju 2-dimenzionalnih simpleksa u ravnini kao u prethodnim primjerima, t.j. orijentaciju *suprotnu kretanju kazaljke na satu*, zvat ćemo *pozitivnom*, i u sljedećim primjerima, pri određivanju homoloških grupa „osnovnih" ploha (sfere, torusa, projektivne ravnine i Kleinove boce), nećemo više stavljati oznaku $\circlearrowleft$.

Topološka invarijantnost homoloških grupa

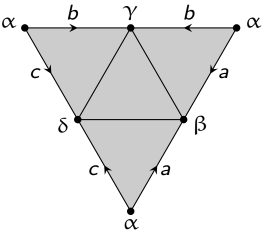
Uoči da kvadrat K i simplicijalni kompleksi u primjerima 13.2 i 13.4 imaju jednake homologije u svim dimenzijama. To reflektira činjenicu da su homološke grupe topološke invarijante, t.j. ovise samo o politopu, geometrijskoj realizaciji kompleksa K.

Dakle, ako dva simplicijalna kompleksa K i K' imaju jednake politope, kao u primjerima 3 i 4, onda su njihove homološke grupe izomorfne. Štoviše, ako su $X \cong Y$ homeomorfni topološki prostori, a K i L simplicijalni kompleksi takvi da je $|K| = X$ i $|L| = Y$, onda je $H_n(K) \cong H_n(L)$ za sve n, pa se u tom slučaju definira $H_n(X) := H_n(K)$ za bilo koji kompleks K t.d. je $X \cong |K|$.

Dokaz topološke invarijantnosti simplicijalnih homoloških grupa nije jednostavan. Najčešće se provodi tako da se definiraju *singularne homološke grupe*, za koje se lako pokaže topološka invarijantnost. Zatim se dokaže da i simplicijalna i singularna homologija imaju određena svojstva, t.j. da zadovoljavaju *aksiome teorije homologije*, te se napokon dokaže da su sve homološke teorije koje zadovoljavaju te aksiome, međusobno izomorfne. Sve to zahtijeva mnogo ozbiljnog posla i uvelike prelazi okvire ovog kolegija.

Primjer 5: homologija sfere $\mathbb{S}^2$

Neka je S simplicijalni kompleks kao na slici, koji triangulira sferu $\mathbb{S}^2$.



Kao što znamo, $H_0(S) \cong \mathbb{Z}$ i $H_{n\geqslant 3}(S) = 0$. *Prečicom* zaključujemo kako je svaki 1-ciklus homologan nekom 1-ciklusu koji živi na ‚rubu'. Neka je, dakle, $\zeta = t\,a + u\,b + v\,c$, $t, u, v \in \mathbb{Z}$, proizvoljan 1-ciklus na ‚rubu'. Tada je

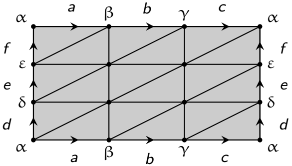
$$\begin{aligned} \partial\zeta &= t\beta - t\alpha + u\gamma - u\alpha + v\delta - v\alpha \\ &= (-t-u-v)\alpha + t\beta + u\gamma + v\delta. \end{aligned}$$

Kako je ζ ciklus, t.j. $\partial\zeta = 0$, mora biti $t = u = v = 0$, pa je $\zeta = 0$. Stoga je $\operatorname{Ker}\partial_1 = 0$ pa je i $H_1(S) = 0$.

Neka su $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ 2-simpleksi u S. Ako je 2-lanac $\Omega = \sum_{j=1}^4 n_j\sigma_j$ ciklus, $\partial\Omega = 0$, onda su svi koeficijenti n_i jednaki (kako bi se u rubu $\partial\Omega$ koeficijenti uz ‚unutarnje' bridove pokratili), pa je $\Omega = n\omega$, $n \in \mathbb{N}$, gdje je $\omega = \sum_{j=1}^4 \sigma_j$. No, $\partial\omega = a - a + b - b + c - c = 0$, pa je $\operatorname{Ker}\partial_2 = \langle\omega\rangle$. Konačno, kako je $\operatorname{Im}\partial_3 = 0$, to je $H_2(S) = \operatorname{Ker}\partial_2 = \langle\omega\rangle \cong \mathbb{Z}$.

Primjer 6: homologija torusa

Neka je T simplicijalni kompleks kao na slici, koji triangulira torus.



Kao i prije, $H_0(T) \cong \mathbb{Z}$ i $H_{n\geqslant 3}(T) = 0$, i kao kod sfere, dovoljno je gledati proizvoljan 1-ciklus $\zeta = t\,a + u\,b + v\,c + x\,d + y\,e + z\,f$, $t,u,v,z,y,z \in \mathbb{Z}$, u ,rubu'.

$$\partial\zeta = t\beta - t\alpha + u\gamma - u\beta + v\alpha - v\gamma + x\delta - x\alpha + y\varepsilon - y\delta + z\alpha - z\varepsilon$$
$$= (-t + v - x + z)\alpha + (t - u)\beta + (u - v)\gamma + (x - y)\delta + (y - z)\varepsilon.$$

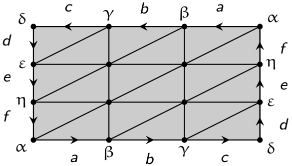
Zbog $\partial\zeta = 0$ mora biti $t = u = v$, $x = y = z$ i $t + x = v + z$, pa je $\zeta = t\varphi + x\psi$, gdje je $\varphi = a+b+c$ i $\psi = d+e+f$. Dakle, $\operatorname{Ker}\partial_1 = \langle\varphi, \psi\rangle$.

Neka je $\Omega = \sum_{j=1}^{18} n_j\sigma_j$ proizvoljan 2-lanac. Ako $\partial\Omega$ živi na ,rubu', onda je $\Omega = n\omega$ za neki $n \in \mathbb{N}$, gdje je $\omega = \sum_{j=1}^{18} \sigma_j$ tzv. ***fundamentalni lanac***. Kako je $\partial\omega = 0$, to je $\operatorname{Im}\partial_2 = 0$, t.j. ω je ciklus, pa je $H_1(T) = \langle[\![\varphi]\!], [\![\psi]\!]\rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Kao i kod sfere zaključujemo da je svaki 2-ciklus višekratnik fundamentalnog ciklusa ω, pa je zbog $\operatorname{Im}\partial_3 = 0$, $H_2(T) = \langle[\![\omega]\!]\rangle \cong \mathbb{Z}$.

Primjer 7: homologija projektivne ravnine

Neka je P simplicijalni kompleks kao na slici, koji triangulira projektivnu ravninu.



Kao i prije, $H_0(P) \cong \mathbb{Z}$ i $H_{n\geqslant 3}(P) = 0$, i kao kod sfere, dovoljno je gledati proizvoljan 1-ciklus $\zeta = ta + ub + vc + xd + ye + zf$, $t,u,v,z,y,z \in \mathbb{Z}$, u ‚rubu'.

$$\begin{aligned}\partial\zeta &= t\beta - t\alpha + u\gamma - u\beta + v\delta - v\gamma + x\varepsilon - x\delta + y\eta - y\varepsilon + z\alpha - z\eta \\ &= (z-t)\alpha + (t-u)\beta + (u-v)\gamma + (v-x)\delta + (x-y)\varepsilon + (y-z)\eta.\end{aligned}$$

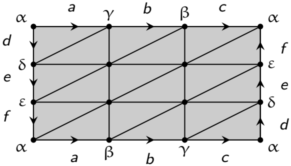
Zbog $\partial\zeta = 0$ mora biti $t = u = v = x = y = z$, pa je $\zeta = t\varphi$, gdje je $\varphi = a + b + c + d + e + f$. Dakle, $\operatorname{Ker}\partial_1 = \langle\varphi\rangle$.

Neka je $\Omega = \sum_{j=1}^{18} n_j\sigma_j$ proizvoljan 2-lanac. Ako $\partial\Omega$ živi na ‚rubu', onda je $\Omega = n\omega$ za neki $n \in \mathbb{N}$, gdje je $\omega = \sum_{j=1}^{18}\sigma_j$ fundamentalni lanac. Kako je $\partial\omega = 2\varphi$, zaključujemo da je $H_1(P) = \langle\varphi\rangle/\langle 2\varphi\rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$.

Kao i kod sfere zaključujemo da je svaki 2-ciklus višekratnik fundamentalnog lanca ω, a zbog $\partial\omega = 2\varphi \neq 0$, je $H_2(P) = 0$.

Primjer 8: homologija Kleinove boce

Neka je K simplicijalni kompleks kao na slici, koji triangulira Kleinovu bocu.



Kao i prije, $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ i $H_{n\geqslant 3}(K) = 0$, i kao kod sfere, dovoljno je gledati proizvoljan 1-ciklus $\zeta = ta + ub + vc + xd + ye + zf$, $t,u,v,z,y,z \in \mathbb{Z}$, u ‚rubu'.

$$\begin{aligned}\partial\zeta &= t\beta - t\alpha + u\gamma - u\beta + v\alpha - v\gamma + x\delta - x\alpha + y\varepsilon - y\delta + z\alpha - z\varepsilon \\ &= (-t + v - x + z)\alpha + (t-u)\beta + (u-v)\gamma + (x-y)\delta + (y-z)\varepsilon.\end{aligned}$$

Zbog $\partial\zeta = 0$ mora biti $t = u = v$ i $x = y = z$, pa je $\zeta = t\varphi + x\psi$, gdje su $\varphi = a + b + c$ i $\psi = d + e + f$. Dakle, $\operatorname{Ker}\partial_1 = \langle \varphi, \psi \rangle$.

Neka je $\Omega = \sum_{j=1}^{18} n_j \sigma_j$ proizvoljan 2-lanac. Ako $\partial\Omega$ živi na ‚rubu', onda je $\Omega = n\omega$ za neki $n \in \mathbb{N}$, gdje je $\omega = \sum_{j=1}^{18} \sigma_j$ fundamentalni lanac. Kako je $\partial\omega = 2\psi$, zaključujemo da je $H_1(K) = \langle \varphi, \psi \rangle / \langle 2\psi \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Kao i kod sfere zaključujemo da je svaki 2-ciklus višekratnik fundamentalnog lanca ω, a zbog $\partial\omega = 2\psi \neq 0$, je $H_2(K) = 0$.

Euler-Poincaréova karakteristika

Vratimo se općenitim simplicijalnim kompleksima i njihovoj homologiji.

Definicija 13.6

Neka je K konačan simplicijalni kompleks dimenzije n, i neka je n_j broj j-dimenzionalnih simpleksa u K, $0 \leqslant j \leqslant n$.
Euler-Poincaréova karakteristika kompleksa K je broj

$$\chi(K) := \sum_{j=0}^{n} (-1)^j n_j .$$

Vrijedi sljedeći upečatljiv teorem:

Teorem 13.7

Neka je K konačan simplicijalni kompleks dimenzije n. Tada je

$$\chi(K) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \operatorname{r}\big(H_j(K)\big),$$

t.j. Euler-Poincaréova karakteristika jednaka je alterniranoj sumi Bettijevih brojeva kompleksa K.

Dokaz

$H_j(K) = \mathrm{Ker}\,\partial_j/\mathrm{Im}\,\partial_{j+1}$ pa je $\mathrm{r}\big(H_j(K)\big) \overset{(*)}{=} \mathrm{r}(\mathrm{Ker}\,\partial_j) - \mathrm{r}(\mathrm{Im}\,\partial_{j+1})$ (teorem 12.3).
$C_j(K)$ je slobodna abelovska grupa ranga n_j, pa, prema korolaru 12.4, iz kratkog egzaktnog niza $0 \to \mathrm{Ker}\,\partial_j \hookrightarrow C_j(K) \xrightarrow{\partial_j} \mathrm{Im}\,\partial_j \to 0$ dobivamo $n_j = \mathrm{r}(C_j(K)) = \mathrm{r}(\mathrm{Ker}\,\partial_j) + \mathrm{r}(\mathrm{Im}\,\partial_j)$. Stoga je

$$\begin{aligned}
\chi(K) &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j n_j = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j r\big(C_j(K)\big) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\big(\mathrm{r}(\mathrm{Ker}\,\partial_j) + \mathrm{r}(\mathrm{Im}\,\partial_j)\big)\\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\,\mathrm{r}(\mathrm{Ker}\,\partial_j) + \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\,\mathrm{r}(\mathrm{Im}\,\partial_j)\\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\,\mathrm{r}(\mathrm{Ker}\,\partial_j) + \sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+1}\,\mathrm{r}(\mathrm{Im}\,\partial_{j+1}), \quad \text{jer je } \mathrm{Im}\,\partial_0 = \mathrm{Im}\,\partial_{n+1} = 0\\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\big(\mathrm{r}(\mathrm{Ker}\,\partial_j) - \mathrm{r}(\mathrm{Im}\,\partial_{j+1})\big) \overset{(*)}{=} \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\,\mathrm{r}(H_j(K)). \qquad \square
\end{aligned}$$

Oprez: Teorem *NE tvrdi* da je $r(H_j(K)) = n_j$, već samo da su odgovarajuće alternirane sume jednake.

Euler-Poincaréova karakteristika ploha

Zbog rečene topološke invarijantnosti homoloških grupa i prethodnog teorema, svakom se kompaktnom konačnodimenzionalnom poliedru X, t.j. topološkom prostoru koji je homeomorfan geometrijskoj realizaciji (politopu) nekog konačnog simplicijalnog kompleksa, može pridijeliti njegova Euler-Poincaréova karakteristika $\chi(X)$.

Kako svaka ploha dopušta triangulaciju, to znači da svakoj plohi M možemo pridružiti njezinu Euler-Poincaréovu karakteristiku $\chi(M)$, i ona je jednaka $n_0 - n_1 + n_2$, gdje su n_0, n_1 i n_2 brojevi vrhova, bridova i trokutova u ***bilo kojoj*** triangulaciji plohe M.

Kao što ćemo vidjeti, Euler-Poincaréova karakteristika je, uz orijentabilnost, glavni podatak pri klasifikaciji ploha.

Euler-Poincaréove karakteristike „osnovnih" ploha (sfere $\mathbb{S}^2$, torusa $\mathbb{T}$, projektivne ravnine $\mathbb{R}P^2$ i Kleinove boce $\mathbb{K}$), primjeri 5–8, su:

$$\chi(\mathbb{S}^2) = 2,\ \chi(\mathbb{T}) = 0,\ \chi(\mathbb{R}P^2) = 1 \text{ i } \chi(\mathbb{K}) = 0.$$

2-poliedri i njihove homološke grupe

Triangulirani 2-kompleks bez ruba je 2-dimenzionalan simplicijalni kompleks koji zadovoljava $\Delta1$–$\Delta3$ iz teorema 6.3, i njihove geometrijske realizacije nazivat ćemo ***2-poliedrima bez ruba***, a kako ćemo se baviti isključivo takvim poliedrima, kratko ćemo ih zvati samo ***2-poliedri***. Kao što smo već rekli, svaka ploha dopušta triangulaciju, pa je klasa svih 2-poliedara isto što i klasa svih ploha (povezanih, kompaktnih, i bez ruba).

Cilj nam je odrediti homološke grupe trianguliranih 2-kompleksa bez ruba, pa time i 2-poliedara, t.j. ploha.

Kako je svaki triangulirani 2-kompleks K povezan, prema teoremu 13.5 je $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$, a kako je dvodimenzionalan, $H_n(K) = 0$ za sve $n \geqslant 3$. Treba, dakle, odrediti $H_2(K)$ i $H_1(K)$.

$H_2(K)$

Propozicija 14.1

Neka je K triangulirani 2-kompleks. Tada je $H_2(K) = 0$ ili $H_2(K) \cong \mathbb{Z}$.

Dokaz: Ako je 2-lanac $\zeta = \sum n_j \sigma_j$ ciklus onda su koeficijenti uz svaka dva 2-simpleksa koji imaju zajednički brid, ili jednaki ili suprotni (ovisno o orijentaciji tih 2-simpleksa). Zbog povezanosti i svojstva $\Delta 1$ u teoremu 6.3, od svakog 2-simpleksa se do svakog drugog može doći preko konačno mnogo susjednih 2-simpleksa. Odatle slijedi da svi koeficijenti u ζ imaju istu apsolutnu vrijednost, pa ako je ζ netrivijalan ciklus, onda je on višekratnik 2-ciklusa $\zeta_0 = \sum \epsilon_j \sigma_j$, gdje su $\epsilon_j = \pm 1$. Neka je $\eta = \sum m_j \sigma_j$ neki drugi 2-ciklus. Tada je $\vartheta = \eta - \epsilon_1 m_1 \zeta_0$ ciklus u kojem je koeficijent uz σ_1 jednak nuli, pa moraju i ostali njegovi koeficijenti biti jednaki nuli, t.j. $\vartheta = 0$. Dakle i η je neki višekratnik od ζ_0. Stoga je $\operatorname{Ker} \partial_2$ ili 0 ili beskonačna ciklička grupa, pa je $H_2(K) = 0$ ili je $H_2(K) \cong \mathbb{Z}$. □

$H_2(K) \cong \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; K$ je orijentabilan

Teži dio posla sadržan je u dokazu sljedeće tvrdnje:

Propozicija 14.2

Neka je K triangulirani 2-kompleks. $H_2(K) \cong \mathbb{Z}$ ako i samo ako je K orijentabilan, t.j. politop $|K|$ je orijentabilna ploha (vidi 11.6).

Dokaz: Ako je $H_2(K) \cong \mathbb{Z}$ onda, prema prethodnoj propoziciji, 2-simplekse možemo orijentirati t.d. je $\omega = \sum \sigma_j$ ciklus*. Neka je $\sigma = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ neki 2-simpleks s tako odabranom orijentacijom. Njegov politop $|\sigma|$ je trokut, pa se može afinom transformacijom preslikati na trokut u $\mathbb{E}^2$ tako da se α_0, α_1 i α_2 preslikaju redom u, npr., $0 = (0,0)$, $e_1 = (1,0)$ i $e_2 = (0,1)$. Ovim preslikavanjem je definirana i orijentacija na $|\sigma|$ kao dijela plohe $|K|$. Naime, cikličkoj permutaciji vrhova simpleksa odgovara ciklička permutacija vektora 0, e_1 i e_2 eksplicite dana s $(x,y) \mapsto (1-x-y, x)$, koja ima stupanj 1. Tako dobivamo određenu orijentaciju nutrine svakog 2-simpleksa od K.

(nastavak) ☞

---

*ω je tzv. *fundamentalni ciklus*—suma *svih* 2-simpleksa.

Nastavak dokaza propozicije 14.2

Otvorene zvijezde $\operatorname{St}\alpha$ vrhova kompleksa K su planarna područja, jer je svaka homeomorfna disku, i čine otvoren pokrivač plohe $|K|$. Pokazat ćemo da taj pokrivač dopušta kompatibilnu orijentaciju. Svaka zvijezda $\operatorname{St}\alpha$ je orijentabilna jer je homeomorfna disku, i neka je njezina orijentacija određena nekim trokutom $|\sigma| \subseteq \overline{\operatorname{St}}\,\alpha$. Pokažimo da različiti trokuti u zvijezdi određuju istu orijentaciju zvijezde. Dovoljno je razmotriti dva susjedna trokuta σ i σ'. Ako im je zajednički brid $[\alpha,\alpha_1]$, onda njihove orijentacije moraju biti oblika $\sigma = [\alpha,\alpha_1,\alpha_2]$ i $\sigma' = [\alpha,\alpha_3,\alpha_1]$ (kako bi u rubu $\partial\omega$, $[\alpha,\alpha_1]$ nestao). Neka su f i f' pripadna afina preslikavanja. Definiramo $h\colon |\sigma|\cup|\sigma'| \to \mathbb{E}^2$ s $h(x) = \begin{cases} f(x) & ,x \in |\sigma| \\ \varphi(f'(x)) & ,x \in |\sigma'| \end{cases}$, gdje je $\varphi(x,y) = (y,-x)$. Lako se vidi da je h homeomorfizam, i orijentacije koje h i f' definiraju na $|\sigma'|$ se podudaraju, jer je φ rotacija, pa čuva orijentaciju ravnine $\mathbb{E}^2$. Tako smo orijentirali sve zvijezde, i njihove orijentacije su kompatibilne. Jer, ako se dvije zvijezde sijeku, onda im je presjek nutrina jednog trokuta, i orijentacija obje zvijezde je definirana orijentacijom baš tog trokuta.

(nastavak) ☞

Završetak dokaza propozicije 14.2

Time smo dokazali da je K orijentabilan.

Dokažimo obrat: ako je K orijentabilan onda je $H_2(K) \cong \mathbb{Z}$.

Neka je ploha $|K|$ orijentirana i neka je σ neki 2-simpleks. Odaberimo afinu transformaciju f za σ tako da se slaže s orijentacijom od $|K|$. Time je određen redoslijed vrhova $[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$. Kada bi susjedni simpleks σ' imao redoslijed vrhova $[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3]$, mogli bismo s $h(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in |\sigma| \\ \psi(f'(x)) & , x \in |\sigma'| \end{cases}$, gdje je $\psi(x, y) = (x, -y)$, definirati preslikavanje $h\colon |\sigma| \cup |\sigma'| \to \mathbb{E}^2$. Ali, kako ψ mijenja orijentaciju ravnine $\mathbb{E}^2$, to se afina transformacija f' za σ' ne slaže s h, dakle niti s orijentacijom na $|K|$. Mora, dakle, redoslijed vrhova za σ' biti $[\alpha_0, \alpha_3, \alpha_1]$, pa se u rubu $\partial\omega$ koeficijenti uz $[\alpha_0 \alpha_1]$ krate, te je $\omega = \sum \sigma_j$ 2-ciklus. Kako je $\operatorname{Im} \partial_3 = 0$, to je $H_2(K) \cong \mathbb{Z}$. □

Ostaje odrediti $H_1(K)$.

$H_1(K)$

Propozicija 14.3

*Neka je K triangulirani 2-kompleks i $r = r(H_1(K))$.
Ako je K orijentabilan onda je $H_1(K) \cong \mathbb{Z}^r = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r \text{ sumanada}}$, a ako je K neorijentabilan onda je $H_1(K) \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_2$.*

Dokaz: Odredimo najprije torzionu podgrupu od $H_1(K)$. Neka je ζ 1-ciklus t.d. je $m\zeta \sim 0$ za neki $m > 0$, t.j. $\exists$ 2-lanac $\Omega = \sum n_j \sigma_j$ t.d. je $m\zeta = \partial\Omega$. Ako σ_j i σ_k imaju zajednički brid a, onda je koeficijent uz a u $\partial\Omega$ jednak $n_j + n_k$, ili $n_j - n_k$, ili $-n_j + n_k$, ili $-n_j - n_k$, pa ili $m \mid (n_j + n_k)$ ili $m \mid (n_j - n_k)$. Kako je K povezan, to vrijedi za svaka dva indeksa j, k, bez obzira imaju li σ_j i σ_k zajednički brid ili ne. Ako je K orijentabilan onda je fundamentalni 2-lanac $\omega = \sum \sigma_i$, ciklus, t.j. $\partial\omega = 0$, pa je $m\zeta = \partial\Omega - n_1\partial\omega = \sum (n_j - n_1)\partial\sigma_j$. Svaki 1-simpleks a u rubu je dvaju 2-simpleksa, σ_j, σ_k, pa je zbog orijentabilnosti, koeficijent u $\partial\sigma_j + \partial\sigma_k$ uz a jednak 0, te je koeficijent uz a u $m\zeta - \sum (n_j - n_1)\partial\sigma_j = 0$ jednak $m\zeta(a) - (n_j - n_1) + (n_k - n_1) = m\zeta(a) + n_k - n_j = 0$, ili $m\zeta(a) + n_j - n_k = 0$. U oba slučaja $m \mid (n_j - n_1)$ za sve j, pa je $\zeta = \sum \frac{n_j - n_1}{m} \partial\sigma_j = \partial\left(\sum \frac{n_j - n_1}{m} \sigma_j\right)$, t.j. $\zeta \sim 0$, pa $H_1(K)$ nema torzije.

Nastavak dokaza propozicije 14.3

Neka je kompleks K neorijentabilan. Znamo da je $H_2(K) = 0$, a kako je i $\operatorname{Im} \partial_3 = 0$, to u K nema netrivijalnih 2-ciklusa. Koeficijenti u rubu $\partial\omega = \sum \partial\sigma_j$ su jednaki 0 ili ± 2, t.j. $\partial\omega = 2\eta$ za neki 1-lanac η. Tada je $2\eta \sim 0$, ali $\eta \not\sim 0$ jer bi inače bilo $\eta = \partial\big(\sum s_j\sigma_j\big)$ za neke $s_i \in \mathbb{Z}$, pa bi imali $0 = 2\eta - \partial\omega = \sum(2s_j - 1)\partial\sigma_j$ u suprotnosti s činjenicom da nema netrivijalnih 2-ciklusa.
Vratimo se 1-ciklusu ζ. $m\zeta = \sum n_j\partial\sigma_j$ i $n_j \equiv n_k \pmod m$ ili $n_j \equiv -n_k \pmod m$ za sve j, k, pa je $m\zeta \overset{(*)}{=} n_1 \sum \epsilon_j\partial\sigma_j + m\sum t_j\partial\sigma_j$ za $\epsilon_j = \pm 1$ i neke $t_j \in \mathbb{Z}$. Barem neki od koeficijenata u $\sum \epsilon_j\partial\sigma_j$ je ± 2, jer bi inače $\sum \epsilon_j\sigma_j$ bio netrivijalni 2-ciklus. Stoga je $2n_1$ djeljivo s m, pa je $2\zeta \sim 0$ (pomnožimo $(*)$ s 2), t.j. $2\zeta = \sum u_j\partial\sigma_j$ za neke $u_j \in \mathbb{Z}$. Svi u_j su iste parnosti (raniji zaključak za $m = 2$), pa ako su svi parni onda je $\zeta \sim 0$, a ako su svi neparni onda je $\zeta \sim \sum v_j\partial\sigma_j$ za neke $v_j \in \mathbb{Z}$. Stoga je $[\![\zeta]\!] = [\![\sum v_j\partial\sigma_j]\!]$ jedini element konačnog reda, pa je torziona podgrupa jednaka $\mathbb{Z}_2$. Tvrdnja sada slijedi iz strukturnog teorema za konačno generirane abelovske grupe, teorem12.2. $\square$

Homološke grupe trianguliranih 2-kompleksa

Rezimirajmo:

Teorem 14.4

Neka je K triangulirani 2-kompleks. Tada je

- $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ *i* $H_n(K) = 0$ *za* $n \geqslant 3$.
- K *je orijentabilan ako i samo ako je* $H_2(K) \cong \mathbb{Z}$, *i tada je* $H_1(K) \cong \mathbb{Z}^r$ *za neki* $r \in \mathbb{N}_0$.
- K *je neorijentabilan ako i samo ako je* $H_2(K) = 0$, *i tada je* $H_1(K) \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_2$ *za neki* $r \in \mathbb{N}_0$.

Kao što znamo, teorem 13.7, Euler-Poincaréova karakteristika je alternirana suma Bettijevih brojeva, t.j. $\chi(K) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \operatorname{r}\left(H_j(K)\right)$. Dakle, za orijentabilne triangulirane 2-komplekse (orijentabilne plohe) je $\chi(K) = 2 - r$, a za neorijentabilne je $\chi(K) = 1 - r$, gdje je $r = r(H_1(K))$.

6 KLASIFIKACIJSKI TEOREM ZA KOMPAKTNE PLOHE

- Triangulabilnost ploha
- Klasifikacijski teorem

Triangulabilnost ploha

Prisjetimo se definicije triangulabilnosti ploha:

Definicija 6.1

Triangulacija kompaktne plohe M je par (K, τ), gdje je K konačan 2-dimenzionalan simplicijalni kompleks, a funkcija $\tau\colon K \to \mathscr{P}(M)^*$ svakom simpleksu $\sigma \in K$ pridružuje zatvoren podskup $\tau(\sigma) \subseteq M$, tako da vrijedi:

(τ1) $\tau(\sigma_1) \cap \tau(\sigma_2) = \tau(\sigma_1 \cap \sigma_2)$ za sve $\sigma_1, \sigma_2 \in K$;

(τ2) za svaki $\sigma \in K$ postoji homeomorfizam $\varphi_\sigma\colon |\sigma| \to \tau(\sigma)$ takav da za sve stranice $\sigma' \leqslant \sigma$ vrijedi $\varphi_\sigma(\sigma') = \tau(\sigma')$;

(τ3) $\bigcup_{\sigma \in K} \tau(\sigma) = M$, tj. skupovi $\tau(\sigma)$ pokrivaju M;

Za plohu M kažemo da je ***triangulabilna*** ako postoji triangulacija $\tau\colon K \to \mathscr{P}(M)$, a za par (M, τ) kažemo da je ***triangulirana*** ploha.

---

*$\mathscr{P}(M)$ je partitivni skup od M.

Triangulirana ploha

Ekvivalentna, ali ‚konstruktivna' definicija triangulirane plohe, je sljedeća:

Definicija 15.1

Neka je $\mathcal{T}$ konačna familija sukladnih disjunktnih jednakostraničnih trokutova u ravnini, i neka je T topološki prostor dobiven identifikacijom svake stranice nekog trokuta s točno jednom stranicom nekog drugog trokuta. Ako je dobiveni kvocijentni prostor T povezana ploha, onda kažemo da je T ***triangulirana ploha***.

Sljedeći teorem o triangulabilnosti dokazao je Tibor Radó 1925.

Teorem 15.2

Svaka ploha (kompaktna, povezana i bez ruba) homeomorfna je trianguliranoj plohi, t.j. svaka je ploha triangulabilna.

Napomena: I svaka nekompaktna ploha i ploha s rubom je triangulabilna, kao i sve 3-mnogostrukosti. Ali u dimenzijama $\geqslant 4$ postoje mnogostrukosti koje nisu triangulabilne.

Ploha kao kvocijentni prostor pravilnog poligona u ravnini

Pokažimo kako je svaka ploha M homeomorfna plohi dobivenoj od pravilnog poligona K u ravnini, lijepljenjem odgovarajućih stranica. Neka je M homeomorfna trianguliranoj plohi T, dobivenoj od familije $\mathcal{T} = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ disjunktnih sukladnih jednakostraničnih trokutova, čije stranice označimo $a_1, a_2, \ldots, a_{3n/2}$ (svaka se stranica pojavljuje dvaput, jednom u dva različita trokuta). Uočimo jednu stranicu, a, trokuta Δ_1. Neka je Δ_{j_2} jedinstven trokut koji također ima stranicu a. Identifikacijom dobiveni četverokut (romb) transformiramo u kvadrat. Uočimo jednu stranicu, b, kvadrata, uzmemo novi trokut Δ_{j_3} koji ima također stranicu b, izvršimo identifikaciju, i dobiveni peterokut transformiramo u pravilan peterokut, itd. dok ne potrošimo sve trokutove, uvijek birajući stranicu koja se u rubu već dobivenog poligona pojavljuje samo jednom. Dobit ćemo pravilan $(n+2)$-terokut koji će na rubu imati parove stranica čijom identifikacijom dobivamo plohu homeomorfnu s M.

Rezimirajmo

Pravilni poligon K koji reprezentira plohu M je ćelijski kompleks, koji primjenom teorema 2.3 dovedemo u normalnu formu.

Sljedeći korak je pokazati kako različite normalne forme predstavljaju različite, tj. nehomeomorfne plohe.

- Prvo, transformacije (P2) i $(\mathrm{P2})^{-1}$ korištene pri redukciji ćelijskog kompleksa na normalnu formu, čuvaju tip orijentabilnosti i Euler-Poincaréovu karakteristiku.
- Drugo, ako su dvije plohe homeomorfne, onda su istog tipa orijentabilnosti, jer je za orijentabilne plohe $H_2(M) \cong \mathbb{Z}$, a za neorijentabilne je $H_2(M) = 0$ (propozicije 14.1 i 14.2). Dakle, orijentabilna ploha ne može biti homeomorfna nekoj neorijentabilnoj plohi.
- Treće, svakoj smo plohi pridijelili Euler-Poincaréovu karakteristiku. Kako ona ne ovisi o triangulaciji, teorem 13.7, za orijentabilne plohe je $\chi(M) = 2-r$, a za neorijentabilne je $\chi(M) = 1-r$, gdje je $r = \operatorname{rang} H_1(M)$. Dakle, u istoj klasi orijentabilnosti, nehomeomorfne plohe imaju različite Euler-Poincaréove karakteristike.

Klasifikacijski teorem za kompaktne plohe bez ruba

Sada konačno imamo sve elemente za klasifikacijski teorem:

Teorem 16.1 (Klasifikacijski teorem za kompaktne plohe bez ruba)

Dvije povezane kompaktne plohe bez ruba su homeomorfne ako i samo ako su istog tipa orijentabilnosti i imaju jednake Euler-Poincaréove karakteristike.

Dokaz: Ako su plohe M_1 i M_2 homeomorfne, onda je $H_j(M_1) \cong H_j(M_2)$, $j \geqslant 0$, pa su njihove Euler-Poincaréove karakteristike jednake (teorem 13.7), a zbog $H_2(M_1) \cong H_2(M_2)$ su i istog tipa orijentabilnosti (teorem 14.4).

Obratno, neka su K_1 i K_2 triangulacije ploha M_1 i M_2. Simplicijalni kompleksi K_1 i K_2, shvaćeni kao ćelijski kompleksi, ekvivalentni su kanonskim ćelijskim kompleksima $\widehat{K}_1$ i $\widehat{K}_2$ (u normalnoj formi). Ako su $\widehat{K}_1$ i $\widehat{K}_2$ istog tipa orijentabilnosti i imaju jednake Euler-Poincaréove karakteristike, onda su oni jednaki, $\widehat{K}_1 = \widehat{K}_2$ (kanonski ćelijski kompleks ima samo jednu 2-ćeliju i jedan vrh!). Stoga je $M_1 \cong |K_1| \cong |\widehat{K}_1| = |\widehat{K}_2| \cong |K_2| \cong M_2$. □