METRIČKI PROSTORI

Vježbe uz peto poglavlje: Povezani prostori

1. Dokaži da je topološki prostor X povezan ako i samo ako svaki pravi podskup $A \subseteq X$ ima neprazan rub.

2. Koji je od sljedećih podskupova od $\mathbb{E}^2$ povezan odnosno putevima povezan:
   - (i) $K\big((-1,0);1\big) \cup K\big((1,0);1\big)$.
   - (ii) $\overline{K\big((-1,0);1\big)} \cup \overline{K\big((1,0);1\big)}$.
   - (iii) $K\big((-1,0);1\big) \cup \overline{K\big((1,0);1\big)}$.
   - (iv) „Racionalni češalj": $\big(([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times [0,1]\big) \cup \big([0,1] \times \{0\}\big)$.

3. Je li skup $\mathbb{R}$ s kofinitnom topologijom povezan? A putevima povezan?

4. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ dvije topologije na skupu X i neka $\mathcal{T}$ profinjuje $\mathcal{T}'$, tj. $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}'$.
   - (a) Ako je $(X, \mathcal{T})$ (putevima) povezan mora li onda i $(X, \mathcal{T}')$ biti povezan?
   - (b) Ako je $(X, \mathcal{T}')$ (putevima) povezan mora li onda i $(X, \mathcal{T})$ biti povezan?

5. Neka je X topološki prostor a $f : X \to \mathbb{R}$ *lokalno konstantna* funkcija, tj. za svaki $x \in X$ postoji okolina $U \ni x$ takva da je restrikcija $f|_U : U \to \mathbb{R}$ konstantna. Dokaži da ako je prostor X povezan onda je f konstantna funkcija.
   Vrijedi li ova tvrdnja i bez pretpostavke o povezanosti prostora X?

6. Neka je X povezan Hausdorffov prostor koji ima više od jedne točke. Dokaži da se X sastoji od beskonačno mnogo točaka.
   (Napomena: za istinitost tvrdnje dovoljno je da je X T_1-prostor.)

7.
   - (a) Dokaži da ako je X povezan prostor na kojem postoji ne-konstantna neprekidna funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, onda se X sastoji od neprebrojivo mnogo točaka.
   - (b) Dokaži da ako povezan metrički prostor ima više od jedne točke onda on ima neprebrojivo mnogo točaka.

8. Dokaži da svaki polinom neparnog stupnja s realnim koeficijentima ima barem jedan realan korijen.

9. Dokaži da svaka neprekidna funkcija $f : [a,b] \to [a,b]$ ima fiksnu točku, tj. postoji $x \in [a,b]$ takav da je $f(x) = x$.
   [*Uputa:* Promotri funkciju $g(x) = f(x) - x$.]

10. Dokaži da za $n \geq 2$ ne postoji neprekidno injektivno preslikavanje s $\mathbb{E}^n$ u $\mathbb{R}$. Posljedica toga je i korolar 21.17 da za $n \geq 2$, $\mathbb{E}^n$ i $\mathbb{R}$ nisu homeomorfni.
    [Napomena: Za dokaz vrlo netrivijalne općenite činjenice da za $m \neq n$ prostori $\mathbb{E}^m$ i $\mathbb{E}^n$ nisu homeomorfni, potrebne su tehnike algebarske topologije.]

11. Dokaži da ne postoji neprekidna funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ takva da je $x \in \mathbb{Q}$ ako i samo ako je $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

12. Dokaži sljedeći Borsuk-Ulamov teorem (u dimenziji 1):
    Neka je $\mathbb{S} = \big\{x \in \mathbb{E}^2 : \|x\| = 1\big\}$ jedinična kružnica, i neka je $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Dokaži da postoji $x \in \mathbb{S}$ takav da je $f(x) = f(-x)$.
    [*Uputa:* Promotri funkciju $g(x) = f(x) - f(-x)$.]

13. Dokaži korolar 21.20: Neka je X topološki prostor, a $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ familija povezanih podskupova koji imaju zajedničku točku. Tada je i unija $\bigcup\limits_{\alpha \in J} A_\alpha$ povezana.

14. Popuni detalje dokaza da je topološka sinusna krivulja $\overline{S}$ (primjer 21.25) zaista povezan potprostor ravnine $\mathbb{E}^2$. Specijalno pokaži da je $\overline{S}$ zatvorenje skupa S, tj. grafa funkcije $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$, $x \in \langle 0, 1]$.

15. (*a*) Pokaži primjerom da presjek $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$ silaznog niza $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ povezanih zatvorenih podskupova $F_n \subseteq \mathbb{E}^2$ ne mora biti povezan.
    (*b*) Neka je $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ silazan niz kompaktnih povezanih potprostora Hausdorffova prostora X. Dokaži da je tada presjek $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$ povezan.

16. Dokaži lemu 22.4 da je konkatenacija (nadovezivanje) puteva ponovno put.

17. Dokaži teoreme i korolare 22.5–22.10:

    22.5 Neka je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora. Ako je X putevima povezan onda je i slika $f(X)$ putevima povezan potprostor od Y.
    22.6 Povezanost putevima je topološka invarijanta.
    22.7 Neka je $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ familija putevima povezanih podskupova topološkog prostora X. Ako je $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$ za sve $\alpha, \beta \in J$, onda je unija $A = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ putevima povezana.
    22.8 Unija putevima povezanih skupova koji imaju zajedničku točku je putevima povezana.
    22.9 Neka je $\{A_\alpha\}_\alpha$ familija putevima povezanih skupova i neka je B putevima povezan i takav da je je $B \cap A_\alpha \neq \emptyset$ za sve α. Tada je unija $B \cup \bigcup_\alpha A_\alpha$ putevima povezana.
    22.10 Ako su X i Y putevima povezani prostori onda je i produkt $X \times Y$ putevima povezan.

18. Dokaži da je $\mathbb{E}^2 \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$, ravnina bez racionalnih točaka, putevima povezan prostor.

19. Dokaži da je relacija $\div$ u definiciji 23.1 zaista relacija ekvivalencije.
    ($x \div y$ ako postoji povezan potprostor koji sadrži obje točke x i y).

20. Pokaži da je svaki diskretan topološki prostor s barem dvije točke, totalno nepovezan, i da obrat ne vrijedi, tj. nije svaki totalno nepovezan prostor diskretan.

21. Dokaži da je (skupovna) funkcija $f_* : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ definirana neprekidnim preslikavanjem $f : X \to Y$ dobro definirana, i dokaži propoziciju 23.7:
    (*a*) Ako su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ neprekidna preslikavanja onda je $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Z)$.
    (*b*) Ako je $\mathbb{1}_X : X \to X$ identiteta na X onda je $(\mathbb{1}_X)_* = \mathbb{1}_{\mathcal{K}(X)} : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ identiteta na skupu komponenata.

22. Dokaži da topološka sinusna krivulja $\overline{S}$ nije lokalno povezana iako je povezana (vidi primjer 23.10).

23. Definiraj *komponente povezanosti putevima* i *lokalnu povezanost putevima*, te izreci i dokaži analogone tvrdnji 23.3, 23.7, 23.8, 23.11 i 23.12. Vrijedi li i analogon korolara 23.4, tj. jesu li komponente povezanosti putevima zatvoreni skupovi?