METRIČKI PROSTORI

Vježbe uz četvrto poglavlje: Kompaktni prostori

1. (a) Pokaži da je svaki topološki prostor koji ima samo konačno mnogo točaka, kompaktan.
   (b) Pokaži da je diskretan topološki prostor kompaktan ako i samo ako je konačan.

2. Neka su A i B kompaktni potprostori topološkog prostora X. Dokaži da je unija $A \cup B$ kompaktna. Analogna tvrdnja vrijedi i za konačne unije, i pokaži primjerom da unija od beskonačno mnogo kompaktnih potprostora ne mora biti kompaktna. Za presjeke vidi zadatak **??**.

3. Koji su od sljedećih podskupova od $\mathbb{R}$ odnosno $\mathbb{E}^2$ kompaktni?
   (i) $[0,1\rangle$
   (ii) $[0,\infty\rangle$
   (iii) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$; ako je kompaktan — zašto? a ako nije konstruiraj otvoren pokrivač koji se ne može reducirati na konačan potpokrivač.

   (iv) $\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
   (v) $\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$
   (vi) $\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$

4. Pokaži da je $\mathbb{R}$ s kofinitnom topologijom kompaktan.

5. (a) Pokaži da je u euklidskom prostoru $\mathbb{E}^n$ skup jediničnih vektora $\{e_1,\dots,e_n\}$, gdje je $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ (jedinica na i-tom mjestu), kompaktan.
   Je li jedinična sfera $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{E}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ kompaktna?
   (b) Pokaži da je u Hilbertovom prostoru ℓ_2, skup jediničnih vektora $E = \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$, gdje je $e_i = (0,0,\dots,0,1,0,0,\dots)$ (jedinica na i-tom mjestu), omeđen i zatvoren ali nije kompaktan.
   A što je s jediničnom sferom $\mathbb{S}^\infty = \{x \in \ell_2 : \|x\| = 1\}$?

6. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ dvije topologije na X i neka $\mathcal{T}'$ profinjuje $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$. Dokaži da ako je $(X,\mathcal{T}')$ kompaktan onda je i $(X,\mathcal{T})$ kompaktan.

7. Neka su A i B kompaktni potprostori Hausdorffovog prostora X.
   (a) Dokaži da je presjek $A \cap B$ kompaktan.
   (b) Dokaži da je i presjek bilo koje familije kompaktnih potprostora od X kompaktan.

8. (a) Dokaži sljedeći teorem:

   Topološki prostor X je kompaktan ako i samo ako za svaku familiju $\{F_j : j \in J\}$ zatvorenih podskupova $F_j \subseteq X$, koja ima svojstvo da je presjek svake njene konačne potfamilije neprazan, tj. za svaki konačan podskup $K \subseteq J$ je $\bigcap_{j\in K} F_j \neq \emptyset$, vrijedi da je $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$.

   [*Uputa:* Promatraj familiju komplemenata $X \setminus F_j$.]
   [*Napomena:* Za familiju s opisanim svojstvom kaže se da je *centrirana* ili da *ima svojstvo konačnih presjeka.*]

(b) Neka je $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ silazan niz nepraznih zatvorenih podskupova F_n kompaktnog prostora X. Dokaži da je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

9. Dokaži da je svaki kompaktan Hausdorffov prostor normalan.

10. (a) Dokaži da ako skup $A \subseteq \mathbb{R}$ nije kompaktan onda postoji neprekidna funkcija $f\colon A \to \mathbb{R}$ koja nije omeđena.
[*Uputa:* Promotri posebno slučajeve kada A nije omeđen i kada nije zatvoren.]
(b) Dokaži da ako $A \subseteq \mathbb{R}$ nije kompaktan onda postoji neprekidna funkcija $f\colon A \to \mathbb{R}$ koja je omeđena ali nema minimum ili nema maksimum, ili nema niti minimum niti maksimum.

11. Na skupu $\mathbb{N}$ promatramo familiju $\mathcal{T}$ koju čine $\emptyset$, $\mathbb{N}$ i svi skupovi oblika $\{1,\ldots,n\}$, $n \in \mathbb{N}$ („početni komadi" skupa $\mathbb{N}$).
(a) Dokaži da je familija $\mathcal{T}$ jedna topologija na $\mathbb{N}$, te dobiveni topološki prostor označimo $(X,\mathcal{T})$.
(b) Dokaži da su jedina neprekidna preslikavanja s X u proizvoljan Hausdorffov prostor Y, konstantna preslikavanja.
(c) Dokaži da X nije kompaktan.
(d) Zaključi kako su sve neprekidne funkcije $X \to \mathbb{R}$ omeđene, iako X nije kompaktan.

To pokazuje da kompaktnost nismo mogli definirati zahtjevom da su sve neprekidne realne funkcije omeđene, iako se tako moglo pomisliti nakon prethodnog zadatka. (Prostori s ovim svojstvom nazivaju se *pseudokompaktni* vidi zadatak **??**.)

12. Neka je (X,d) kompaktan metrički prostor a $f\colon X \to X$ neprekidno preslikavanje takvo da je $f(x) \neq x$ za sve $x \in X$. Dokaži da postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $d(f(x),x) \geq \varepsilon$ za sve $x \in X$.
[*Uputa:* Promotri funkciju $g\colon X \to \mathbb{R}$ definiranu s $g(x) = d(f(x),x)$.]

13. Pokaži detaljno da funkcija $f\colon \langle 0,\infty\rangle \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = \frac{1}{x}$ je neprekidna ali nije uniformno neprekidna. A što je s restrikcijom funkcije f na $[1,\infty\rangle$?

14. Pokaži primjerom da zamjena metrike nekom topološki ekvivalentnom metrikom na prostoru X i/ili Y može utjecati na to je li neko neprekidno preslikavanje $f\colon X \to Y$ uniformno neprekidno ili ne.

15. Svako neprekidno preslikavanje $f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$, gdje je (X,d_X) kompaktan metrički prostor, je uniformno neprekidno (teorem 18.11). Je li kompaktnost prostora X nužna kako bi neko preslikavanje $f\colon X \to Y$ bilo uniformno neprekidno?

16. Za niz (x_n) u metričkom prostoru (X,d_X) kažemo da je *Cauchyjev niz* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m,n \geq n_0$ vrijedi $d_X(x_m,x_n) < \varepsilon$.
Neka je $f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ uniformno neprekidno preslikavanje a (x_n) Cauchyjev niz u (X,d_X). Dokaži da je tada $\big(f(x_n)\big)$ Cauchyjev niz u (Y,d_Y).

17. Dokaži da ako je funkcija $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ uniformno neprekidna onda postoje jednostrani limesi $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$.
[*Uputa:* Iskoristi prethodni zadatak **??**.]

18. (a) Neka je $f\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna, monotona i omeđena funkcija. Dokaži da je ona i uniformno neprekidna.
[*Uputa:* Slično teoremu 2.2 (svaki monoton omeđen niz u $\mathbb{R}$ konvergira), pokaži da postoje jednostrani limesi $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$, te proširi f do neprekidne funkcije $[0,1] \to \mathbb{R}$.]
(b) Vrijedi li prethodna tvrdnja i bez pretpostavke da je f monotona?

19. Dokaži da ako skup $A \subseteq \mathbb{R}$ nije zatvoren onda postoji neprekidna funkcija $f\colon A \to \mathbb{R}$ koja nije uniformno neprekidna.

20. Za neprazne podskupove A i B metričkog prostora (X,d) definirajmo „udaljenost" (objasni zašto navodnici) $d(A,B) := \inf\limits_{a\in A} d(a,B)$. Dokaži da ako je A kompaktan i B zatvoren onda vrijedi: $d(A,B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$.
[*Uputa:* Za $d(a,B)$, udaljenost točke a do skupa B, vidi definiciju 6.24, i iskoristi propoziciju 6.26.]
Vrijedi li ova ekvivalencija i kada je skup A samo zatvoren?

21. Dokaži da bilo koje dvije norme na $\mathbb{R}^n$ definiraju Lipschitz-ekvivalentne metrike.
[*Uputa:* Pokaži da je svaka norma u $\mathbb{R}^n$ Lipschitz-ekvivalentna 1-normi $\|\ \|_1$.]

22. Postoji li na $[0,1]$ topologija $\mathcal{T}$ koja je strogo grublja od standardne, euklidske topologije $\mathcal{E}$, i takva da je prostor $([0,1],\mathcal{T})$ Hausdorffov?
[*Uputa:* Primijeni teorem 20.3 na identitetu $\mathbb{1}\colon ([0,1],\mathcal{E}) \to ([0,1],\mathcal{T})$].

23. Nađi primjer neprekidne injekcije $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{E}^2$ takve da f nije smještenje, tj. nije homeomorfizam s $\langle a,b\rangle$ na potprostor $f(\langle a,b\rangle) \subseteq \mathbb{E}^2$.

24. Neka je $(L,<)$ linearno (totalno) uređen skup. Za $a,b \in L$, $a < b$, skupove oblika $\langle a,b\rangle := \{x \in L : a < x < b\}$, $[m,b\rangle := \{x \in L : m \leq x < b\}$ ako L ima minimum m, i $\langle a,M] := \{x \in L : a < x \leq M\}$ ako L ima maksimum M, zovemo *otvoreni intervali*. ***Uređajna topologija*** na X je topologija generirana bazom koju čine svi otvoreni intervali.

    Dokaži da ako skup $(L,<)$ ima svojstvo supremuma, tj. svaki neprazan odozgo omeđen skup u L ima supremum, onda je za svaki $a < b$ zatvoren interval $[a,b] := \{x : a \leq x \leq b\}$ kompaktan.

25. Neka je Ω skup svih prebrojivih rednih (ordinalnih) brojeva uređen inkluzijom. (Kao segmentni skup, Ω je prvi neprebrojivi redni broj.) Pokaži da je s uređajnom topologijom, Ω Hausdorffov, i nije kompaktan, iako je svaka neprekidna realna funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ omeđena. (Prostori s ovim svojstvom nazivaju se *pseudokompaktni*.)