METRIČKI PROSTORI

Vježbe uz treće poglavlje: Topološki prostori

1. Nađi primjer dviju topologija $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ na nekom skupu X koje nisu usporedive, tj. niti $\mathcal{T}$ profinjuje $\mathcal{T}'$ niti $\mathcal{T}'$ profinjuje $\mathcal{T}$.

2. Dokaži da je kofinitna topologija, definirana u primjeru 9.7, zaista topologija, tj. da zadovoljava uvjete (TOP1)–(TOP3).

3. Usporedi definicije neprekidnosti i neprekidnosti u točki (stranice 68 i 69), i dokaži da je preslikavanje topoloških prostora neprekidno ako i samo ako je neprekidno u svakoj točki.

4. Dokaži da je familija $\mathcal{B} = \{K(P,r) : P \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, r \in \mathbb{Q}\}$ otvorenih krugova $K(P,r) = \{P' \in \mathbb{R}^2 : \|P' - P\| < r\}$ sa središtima u točkama $P \in \mathbb{R}^2$ s racionalnim koordinatama, i racionalnim radiusima r, baza standardne, tj. euklidske topologije u $\mathbb{R}^2$. Poopći na $\mathbb{R}^n$.

5. Dokaži da je ℓ-topologija definirana u primjeru 10.5 zaista topologija na $\mathbb{R}$, i usporedi ju sa standardnom, tj. euklidskom i s kofinitnom topologijom na $\mathbb{R}$.

6. Dokaži tvrdnju u primjeru 10.7 da skupovi oblika $\langle -\infty, b\rangle$ i $\langle a, +\infty\rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, tvore jednu podbazu standardne topologije na $\mathbb{R}$, kao i da je dovoljno da su $a, b \in \mathbb{Q}$.

7. Neka je $f\colon X \to Y$ homeomorfizam i $A \subseteq X$, Dokaži da su tada i restrikcije $f|_A\colon A \to f(A)$ i $f|_{X\setminus A}\colon X\setminus A \to f(X\setminus A)$ također homeomorfizmi. Pritom, $f(A)$ i $f(X\setminus A)$ imaju relativne topologije kao potprostori od Y.

8. Dokaži da su prostori $[0,1]\times[0,1\rangle$, $[0,1\rangle\times[0,1\rangle$ i $\langle 0,1\rangle\times[0,1\rangle$ homeomorfni.

9. Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Dokaži da je topologija koju bilo koja od metrika d_1, d_2 i d_∞, definiranih na str. 32, inducira na produktu $X\times Y$, upravo produktna topologija definirana na str. 77.

10. Neka su X i Y topološki prostori, $x_0 \in X$ proizvoljna točka. Dokaži da je potprostor $\{x_0\}\times Y \subseteq X\times Y$ homeomorfan prostoru Y, i analogno je $X\times\{y_0\} \cong X$ za proizvoljnu točku $y_0 \in Y$.

11. Dokaži propoziciju 14.3 koja opisuje tri osnovna svojstva familije svih zatvorenih skupova u topološkom prostoru.

12. Daj detaljan dokaz tvrdnji (i)–(iii) u propoziciji 14.6.

13. Pokaži primjerom da lema o lijepljenju za zatvorene skupove, teorem 13.3, ne vrijedi u slučaju kada je X unija beskonačne familije zatvorenih skupova.

14. Neka su X i Y topološki prostori, i neka je $p\colon X\times Y \to X$ projekcija.
    - (a) Dokaži da je za svaki otvoren skup $W \in X\times Y$ skup $p(W)$ otvoren u X, tj. projekcija p je *otvoreno preslikavanje*. Analogno vrijedi za projekciju na Y.
    - (b) Pokaži primjerom da u $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ postoje zatvoreni skupovi čije projekcije nisu zatvoreni skupovi, tj. projekcija $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nije *zatvoreno preslikavanje.*

15. U teoremu 14.23 pokazano je da je $f\colon X \to Y$ neprekidno ako i samo ako je $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ za sve podskupove $A \subseteq X$. Dokaži da ako je f neprekidno, jednakost vrijedi ako i samo ako je $f(\overline{A})$ zatvoren. Je li uvijek $f(\overline{A})$ zatvoren, tj. vrijedi li uvijek jednakost?

16. Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Dokaži, ili protuprimjerom opovrgni tvrdnju da za svaki podskup $B \subseteq Y$ vrijedi $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$. Ako tvrdnja ne vrijedi, vrijedi li barem jedna od inkluzija?

17. Dokaži propoziciju 14.16: Za $A \subseteq Y \subseteq X$ je $\mathrm{Cl}_Y A = \overline{A} \cap Y$, tj. $\mathrm{Cl}_Y A = (\mathrm{Cl}_X A) \cap Y$.

18. Dokaži posljedicu (korolar) 14.18: Za neprazan odozgo omeđen skup $A \subseteq \mathbb{R}$ je $\sup A \in \overline{A}$.

19. Pokaži protuprimjerima da se inkluzije $\bigcup_\alpha \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}$ i $\overline{\bigcap_\alpha A_\alpha} \subseteq \bigcap_\alpha \overline{A_\alpha}$ u teoremima 14.21 i 14.22 ne mogu zamijeniti jednakostima (ova druga čak niti za konačne presjeke).

20. Neka je A omeđen podskup metričkog prostora X. Dokaži da je i zatvorenje $\overline{A}$ omeđen skup. Štoviše, pokaži da je $\operatorname{diam} \overline{A} = \operatorname{diam} A$.

21. Odredi zatvorenje i interior (nutrinu) skupova $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$, $[a, b]$ i $\mathbb{Q}$ u kofinitnoj i u ℓ-topologiji na $\mathbb{R}$.

22. Dokaži propoziciju 14.33: $x \in \partial A$ ako i samo ako svaka okolina točke x siječe skup A i njegov komplement $X \setminus A$.

23. Neka je X topološki prostor i $A \subseteq X$. Dokaži:
    - (i) $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$;
    - (ii) A je zatvoren ako i samo ako je $\partial A \subseteq A$;
    - (iii) $\partial A = \emptyset$ ako i samo ako je A i otvoren i zatvoren u X.

24. Neka su X i Y topološki prostori, $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$ podskupovi. Dokaži da je:
    - (i) $\operatorname{Int}(A \times B) = \operatorname{Int} A \times \operatorname{Int} B$;
    - (ii) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$;
    - (iii) Ako su A i B zatvoreni podskupovi, onda vrijedi $\partial(A \times B) = (\partial A \times B) \cup (A \times \partial B)$. Nađi primjer ne-zatvorenih skupova A i B za koje formula ne vrijedi.

25. Dokaži da svaki metrički prostor koji ima prebrojiv gust podskup, ima prebrojivu bazu topologije. Kaže se da takav prostor zadovoljava *drugi aksiom prebrojivosti*. Vrijedi li obrat?

26. Pokaži da je $\mathbb{R}$ s kofinitnom topologijom T_1-prostor ali da nije Hausdorffov.

27. Dokaži propoziciju 15.9.

28. Neka je X T_1-prostor i $A \subseteq X$. Dokaži da je točka x gomilište skupa A, $x \in A^d$, ako i samo ako svaka ukolina točke x sadrži beskonačno mnogo točaka iz A.

29. Dokaži da je X T_1-prostor ako i samo ako za svake dvije različite točke x i y postoje okoline $U \ni x$ i $V \ni y$ takve da $y \notin U$ i $x \notin V$.

30. Dokaži da ako je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje topološkog prostora X u Hausdorffov prostor Y, onda je graf $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ zatvoren podskup od $X \times Y$.

31. Neka su $f, g\colon X \to Y$ neprekidna preslikavanja topološkog prostora X u Hausdorffov prostor Y. Dokaži da je skup $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ zatvoren.

32. Dokaži da je svaki metrički prostor normalan (i ostale implikacije na dnu str. 107).