Vježbe uz drugo poglavlje: Metrički prostori

1. Dokaži Cauchyjevu nejednakost: za sve $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$\Big(\sum_1^n a_k b_k\Big)^2 \le \Big(\sum_1^n a_k^2\Big)\Big(\sum_1^n b_k^2\Big)$$
ili u vektorskom zapisu, uz $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ i $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$, $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \le \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$. Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ kolinearni.

2. Dokaži da su d_1, d_2 i d_∞ iz primjera 6.4 zaista metrike na $\mathbb{R}^2$, i slično na $\mathbb{R}^n$.

3. Dokaži da su funkcije d_1 i d_2 na str. 36 zaista metrike na skupu neprekidnih realnih funkcija na $[a, b]$.

4. Dokaži da je funkcija d_∞ metrika na skupu omeđenih preslikavanja skupa X u metrički prostor Y.

5. Za fiksan prost broj p definirajmo funkciju $d\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ s
$$d(m,n) := \begin{cases} 0, & \text{za } m = n \\ \frac{1}{r}, & \text{gdje je } m - n = p^{r-1}k, \text{ za } r \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z},\ k \text{ nije djeljiv s } p \end{cases}.$$
Dokaži da je d metrika na $\mathbb{Z}$.

6. Dokaži da su funkcije d_2 na ℓ_2 i d na I^ω (definicije 6.18 i 6.19) zaista metrike.

7. Dokaži da za proizvoljne točke t, x, y i z u metričkom prostoru (X, d) vrijedi:
$$d(x,y) \ge \big|d(x,z) - d(y,z)\big| \tag{$*$}$$
$$d(x,z) + d(y,t) \ge \big|d(x,y) - d(z,t)\big|\,. \tag{$**$}$$

8. Dokaži teorem 6.22: Unija od konačno mnogo omeđenih skupova je omeđen skup.

9. Neka su A i B omeđeni podskupovi metričkog prostora (X, d) t.d. je $A \cap B \ne \emptyset$. Dokaži da je $\operatorname{diam}(A \cup B) \le \operatorname{diam} A + \operatorname{diam} B$.

10. Dokaži propoziciju 7.16: Presjek konačno mnogo otvorenih skupova u metričkom prostoru je otvoren skup.

11. Dokaži propoziciju 7.18: Unija bilo koje familije otvorenih skupova u metričkom prostoru je otvoren skup.

12. Dokaži da je Lipschitz-ekvivalencija metrika zaista relacija ekvivalencije.

13. Dokaži nejednakosti u primjeru 8.6, i time ujedno da su sve tri metrike d_1, d_2 i d_∞ na $\mathbb{R}^n$, i na bilo kojem produktu od n metričkih prostora, Lipschitz-, dakle i topološki, ekvivalentne.

14. Neka je (X, d) metrički prostor. Dokaži da je metrika d, kao funkcija $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, neprekidna ($X \times X$ je metrički prostor s bilo kojom od metrika d_1, d_2 ili d_∞ definiranim na str. 32).

15. Neka je (X, d) metrički prostor i neka su funkcije ρ i ρ' definirane s
$$\rho(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \quad \text{i} \quad \rho'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}\,.$$
Dokaži da su ρ i ρ' metrike na X, i da su topološki ekvivalentne metrici d.

16. Neka je $f\colon X \to \mathbb{R}$ neprekidna realna funkcija na metričkom prostoru X i neka je $f(x_0) > 0$ za neku točku $x_0 \in X$. Dokaži da postoje $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ t.d. je $f(x) > \varepsilon$ za sve $x \in K(x_0; \delta)$.

17. Dokaži propoziciju 8.9: Metrike d i d' na skupu X su topološki ekvivalentne ako i samo ako je identiteta $\mathbb{1}_X\colon (X, d) \to (X, d')$ homeomorfizam.

18. Fiksirajmo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ i $\varphi \in \mathbb{R}$. *Translacija* ravnine za vektor (a, b) je preslikavanje $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirano s

$$\mathsf{T}(x, y) := (x + a, y + b) ,$$

a *rotacija* za kut φ je preslikavanje $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirano s

$$\mathsf{R}(x, y) := (x \cos\varphi - y \sin\varphi,\ x \sin\varphi + y \cos\varphi) .$$

Dokaži da su translacija i rotacija izometrije s obzirom na euklidsku metriku d_2. Jesu li one izometrije i s obzirom na metrike d_1 i/ili d_∞?