METRIČKI PROSTORI

Vježbe uz prvo poglavlje: Malo realne analize — ponavljanje

1. Dokaži korolar 1.2 (Arhimedov aksiom kakav znamo): Za sve realne brojeve a i b, $a > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $n\,a > b$.

2. Dokaži korolar 1.3 (još jedna verzija Arhimedova aksioma): Za svaki realan broj $x > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{n} < x$.

3. Za svaki od sljedećih skupova realnih brojeva ispitaj ima li supremum, odredi ga i ustanovi pripada li supremum tom skupu ili ne:
$$\{x : x^2 \leq 2x - 1\}$$
$$\{x : x^2 + 2x \leq 1\}$$
$$\{x : x^3 < 8\}$$
$$\{x : x \sin x < 1\}.$$

4. Neka su m i n relativno prosti prirodni brojevi. Dokaži da je $\frac{m}{n}$ kvadrat nekog racionalnog broja ako i samo ako su i m i n kvadrati nekih cijelih brojeva.

5. Dokaži da između svaka dva različita realna broja postoji neki iracionalan broj.

6. Dokaži da za svaka dva realna broja x i y vrijedi $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

7. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nenegativni realni brojevi i neka je $a := \max\{a_1, \ldots, a_k\}$. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a^n \leq a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n \leq k\,a^n$, pa zaključi da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = a$.

8. Neka je (x_n) konvergentan niz realnih brojeva (definicija 2.1). Dokaži da je broj ℓ iz te definicije jedinstven.

9. Dokaži da svaki niz realnih brojeva ima monoton podniz.

10. Dokaži teorem 2.2: Svaki monoton ograđen niz realnih brojeva konvergira.

11. Dokaži Bolzano-Weierstrassov teorem za nizove realnih brojeva: Svaki omeđen niz realnih brojeva ima konvergentan podniz.

12. Dokaži teorem 2.4: Niz realnih brojeva konvergira ako i samo ako je Cauchyjev.

13. Neka je $x_1 = \sqrt{2}$ i $x_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{x_n}}$ za $n \geq 1$. Dokaži da niz (x_n) konvergira jedinstvenom korijenu polinoma $x^4 - 4x^2 - x + 4$ koji se nalazi između $\sqrt{3}$ i 2.

14. Dokaži tvrdnje o limesima funkcija f, g i h u primjeru 3.2 na str. 15.

15. Nađi primjer funkcija f i g takvih da je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$, ali limes $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))$ ili ne postoji ili nije jednak c.

16. Dokaži teorem 3.3: Realna funkcija f realne varijable ima u točki x^* limes ℓ ako i samo ako za svaki niz (x_n) koji konvergira točki x^* i $x_n \neq x^*$ za sve n, niz $(f(x_n))$ konvergira k ℓ.

17. Neka je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Dokaži da f nije nigdje neprekidna.

18. Neka je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } x = 0 \text{ ili } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{ako je } x = \frac{p}{q} \text{ gdje su } p \text{ i } q \\ & \text{relativno prosti, } q > 0 \end{cases}$.

    Dokaži da f ima prekid u svakom racionalnom broju različitom od nule, a neprekidna je u svim iracionalnim brojevima i u nuli.

19. Dokaži teorem 4.3: Svaka neprekidna funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ poprima sve međuvrijednosti.