Matrice

* Osnovne operacije s matricama *

Def. (str. 214, udžbenik) Familiju A od $m \cdot n$ realnih brojeva a_{ij}, $i=1..m$, $j=1..n$ zapisanih u obliku PRAVOKUTNE TABLICE

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \times n$ (ima m redaka i n stupaca)

nazivamo REALNOM MATRICOM formata ili TIPA $m \times n$.

* Matrica je $\boxed{\text{KVADRATNA}}$ n-tog reda ako je $m=n$.
* Od svih kvadratnih matrica n-tog reda posebno su važne JEDINIČNA MATRICA I i NUL-MATRICA O:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

* Za dvije matrice ISTOG TIPA kažemo da su jednake ako su im odgovarajući elementi jednaki.

npr. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ su obje tipa 2×2 i imaju odgovarajuće elemente jednake pa su one jednake matrice.

* Množenje matrica skalarom

* Matrica A se množi skalarom (brojem) α tako da se svaki njen element pomnoži sa α.

<u>zad</u> Skalarima $\alpha = 4$ i $\beta = -3$ pomnožite matricu

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & 12 & 6 \\ 5 & 7 & -20 \end{bmatrix}$ b) DZ $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 10 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

<u>Rj</u> a) $\alpha \cdot A = 4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & 12 & 6 \\ 5 & 7 & -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -12 & -4 \\ 16 & 48 & 24 \\ 20 & 28 & -80 \end{bmatrix}$

$\beta \cdot A = -3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & 12 & 6 \\ 5 & 7 & -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 9 & 3 \\ -12 & -36 & -18 \\ -15 & -21 & 60 \end{bmatrix}$

* Zbrajanje matrica

* Kako bi mogli zbrajati matrice one moraju biti istog tipa (tip matrice određujemo tako da prebrojimo koliko matrica ima redaka, a zatim koliko ima stupaca).

<u>zad</u> Zbrojite matrice:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 1 & 4 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

tip 3x2 tip 3x2

$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 1 & 4 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 13 \\ -1 & 5 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$

zbrajamo odgovarajuće elemente

b) $C=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}-2&3&-1\\2&1&1\\6&-5&1\end{bmatrix}$.

tip 3x3 tip 3x3

$$C+D=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&3&-1\\2&1&1\\6&-5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&5&2\\6&6&7\\13&3&10\end{bmatrix}$$

Zad Za matrice $A=\begin{bmatrix}2&-6\\3&30\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}-2&5\\5&4\end{bmatrix}$

izračunajte $A+B$, $A-B$, $A\cdot B$ i $B\cdot A$.

Rj $A+B=\begin{bmatrix}2&-6\\3&30\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&5\\5&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\8&34\end{bmatrix}$

$$A-B=A+(-B)=\begin{bmatrix}2&-6\\3&30\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-5\\-5&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-11\\-2&26\end{bmatrix}$$

ili odmah $A-B=\begin{bmatrix}2&-6\\3&30\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&5\\5&4\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2+2&-6-5\\3-5&30-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-11\\-2&26\end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2&-6\\3&30\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2&5\\5&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot(-2)+(-6)\cdot 5&2\cdot 5+(-6)\cdot 4\\3\cdot(-2)+30\cdot 5&3\cdot 5+30\cdot 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-34&-14\\144&135\end{bmatrix}$$

matrice možemo množiti samo ako su ULANČANE

tj. broj stupaca prve matrice

jednak je broju redaka druge

ovdje imamo $(2\times 2)\cdot(2\times 2)=(2\times 2)$ dobivamo matricu tipa 2×2

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -6\\ 3 & 30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\cdot 2+5\cdot 3 & -2\cdot(-6)+5\cdot 30\\ 5\cdot 2+4\cdot 3 & 5\cdot(-6)+4\cdot 30\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11 & 162\\ 22 & 90\end{bmatrix}$$

Primijetite da je $A\cdot B\neq B\cdot A$ dakle, općenito, množenje matrica NIJE KOMUTATIVNO.

Zad Za matrice $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ -1 & -5 & 4\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}1 & 15 & 2\\ 2 & -3 & 2\\ -4 & 2 & 4\end{bmatrix}$

izračunajte $A+B$, $A-B$, $-2\cdot A$, $A\cdot B$ i $B\cdot A$.

Rj $A+B=\begin{bmatrix}3 & 16 & 7\\ 1 & -8 & 6\\ -1 & 4 & 3\end{bmatrix}$

$$A-B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ -1 & -5 & 4\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 15 & 2\\ 2 & -3 & 2\\ -4 & 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -14 & 3\\ -3 & -2 & 2\\ 7 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

$-5-(-3)=-5+3=-2$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ -1 & -5 & 4\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 15 & 2\\ 2 & -3 & 2\\ -4 & 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 1+1\cdot 2+5\cdot(-4) & 2\cdot 15+1\cdot(-3)+5\cdot 2 & 2\cdot 2+1\cdot 2+5\cdot 4\\ -1\cdot 1-5\cdot 2+4\cdot(-4) & -1\cdot 15-5\cdot(-3)+4\cdot 2 & -1\cdot 2-5\cdot 2+4\cdot 4\\ 3\cdot 1+2\cdot 2-1\cdot(-4) & 3\cdot 15+2(-3)-1\cdot 2 & 3\cdot 2+2\cdot 2-1\cdot 4\end{bmatrix}$$

$(3\times\cancel{3})\cdot(\cancel{3}\times 3)=\underline{(3\times 3)}$

$$=\begin{bmatrix}-16 & 37 & 26\\ -27 & 8 & 4\\ 11 & 37 & 6\end{bmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 15 & 2\\ 2 & -3 & 2\\ -4 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ -1 & -5 & 4\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 2+15\cdot(-1)+2\cdot 3 & 1\cdot 1+15\cdot(-5)+2\cdot 2 & 1\cdot 5+15\cdot 4+2(-1)\\ 2\cdot 2-3\cdot(-1)+2\cdot 3 & 2\cdot 1-3\cdot(-5)+2\cdot 2 & 2\cdot 5-3\cdot 4+2(-1)\\ -4\cdot 2+2(-1)+4\cdot 3 & -4\cdot 1+2\cdot(-5)+4\cdot 2 & -4\cdot 5+2\cdot 4+4\cdot(-1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-7 & -70 & 63\\ 13 & 21 & -4\\ 2 & -6 & -16\end{bmatrix}$$

5

zad Izračunajte sljedeće produkte matrica

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -8 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 13 \\ -15 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 4 + 1\cdot(-15) - 8\cdot 1 & 3\cdot 13 + 1\cdot 4 - 8\cdot(-1) \\ -2\cdot 4 + 5\cdot(-15) + 4\cdot 1 & -2\cdot 13 + 5\cdot 4 + 4\cdot(-1) \end{bmatrix}$

$(2\times \cancel{3})(\cancel{3}\times 2) = (2\times 2)$

$= \begin{bmatrix} -11 & 51 \\ -79 & -10 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 13 \\ 6 & -7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot(-4) + 2\cdot(-1) + 13\cdot 2 \\ 6\cdot(-4) - 7\cdot(-1) + 9\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

$(2\times \cancel{3})\cdot(\cancel{3}\times 1) = \underline{(2\times 1)}$

c) $\begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 15 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\cdot 2 + 2\cdot 15 - 1\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \end{bmatrix}$

$(1\times \cancel{3})\cdot(\cancel{3}\times 1) = \underline{(1\times 1)}$

d) $\begin{bmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -6 & 7 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9\cdot 1 + 1\cdot(-6) + 5\cdot 2 & 9\cdot 4 + 1\cdot 7 + 5\cdot(-8) \\ 0\cdot 1 + 2\cdot(-6) - 4\cdot 2 & 0\cdot 4 + 2\cdot 7 - 4\cdot(-8) \\ 4\cdot 1 + 4\cdot(-6) + 8\cdot 2 & 4\cdot 4 + 4\cdot 7 + 8\cdot(-8) \end{bmatrix}$

$(3\times \cancel{3})\cdot(\cancel{3}\times 2) = \underline{(3\times 2)}$

$= \begin{bmatrix} 13 & 3 \\ -20 & 46 \\ -4 & -20 \end{bmatrix}$

Zad Izračunajte sljedeće producte matrice:

a) $$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot4+9\cdot5+1\cdot4 & 2\cdot2+9\cdot1+1\cdot2 \\ 7\cdot4-4\cdot5-1\cdot4 & 7\cdot2-4\cdot1-1\cdot2 \end{bmatrix}$$

$$(2\times\cancel{3})\cdot(\cancel{3}\times2)=(2\times2) \qquad = \begin{bmatrix} 57 & 15 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\cdot2+5\cdot(-2)+7\cdot3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 23 \end{bmatrix}}}$$

$$(1\times\cancel{3})\cdot(\cancel{3}\times1)=(1\times1)$$

c) $$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -7 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 9 & -4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$(3\times\cancel{3})\cdot(\cancel{3}\times3)=(3\times3)$$

$$= \begin{bmatrix} 4\cdot1+1\cdot9-5\cdot1 & 4\cdot2+1\cdot(-4)-5\cdot4 & 4\cdot(-1)+1\cdot4-5\cdot2 \\ -7\cdot1+2\cdot9+8\cdot1 & -7\cdot2+2\cdot(-4)+8\cdot4 & -7(-1)+2\cdot4+8\cdot2 \\ 1\cdot1+2\cdot9-1\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot(-4)-1\cdot4 & 1\cdot(-1)+2\cdot4-1\cdot2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -16 & -10 \\ 19 & 10 & 31 \\ 18 & -10 & 5 \end{bmatrix}$$