Matematika 2, vježbe (1.4.2020.)

* U zadnjem zadatku s prošlih vježbi, dobili smo $\ln y = \frac{1}{3}$, a kako mi trebamo izračunati y preostalo je još napraviti:

$$\ln y = \frac{1}{3} \Rightarrow \log_e y = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{y = e^{\frac{1}{3}}}$$ što je konačno rj.

Kako nam slijedi kolokvij, danas bi najprije ponovili po jedan zadatak od svake cjeline pa ću to u nastavku i napraviti, a zatim ćemo prijeći na određeni integral. Molim sve studente da zadatke vezane uz ponavljanje najprije pokušaju riješiti samostalno, a onda provjere rješenje u ovim materijalima. Također molim sve studente kojima sam na e-mail odgovarala vezano uz zadatke za 1. kolokvij da svoja rješenja podijele s ostalim studentima.

PONAVLJANJE

zad Odredite intervale monotonosti funkcije

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} = (2x - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Rj UVIJEK najprije trebamo odrediti domenu.

Df zbog korijena mora biti $\underbrace{2x - x^2} \geq 0$

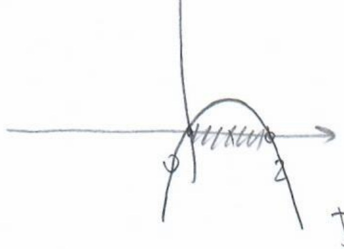
skiciramo pripadni graf

nultočke: $2x - x^2 = 0$

$x(2 - x) = 0$

$\boxed{x_1 = 0,\ x_2 = 2}$

$a = -1 \rightarrow$ parabola okrenuta prema dolje



$D_f = [0, 2]$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2-2x) = \frac{\cancel{2}(1-x)}{\cancel{2}\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

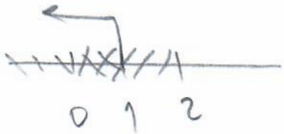
$\sqrt{2x-x^2} > 0$

$f'(x) > 0$

$1-x > 0$

$1 > x$

tj. $x < 1$



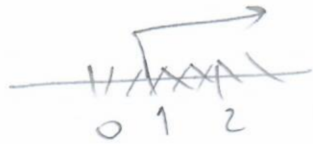
zbog domene f strogo monotono raste na $[0,1)$

$f'(x) < 0$

$1-x < 0$

$1 < x$

tj. $\boxed{x > 1}$



zbog domene f strogo pada na $\underline{\underline{(1,2]}}$

<u>zad</u> Odredite lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = 6x^2 + 6x + 10$$

Rj Uvijek prvo treba odrediti domenu.

Kako se radi o polinomu 2. stupnja $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 12x + 6$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x + 6 = 0 \Rightarrow 12x = -6 \; / :12$

$x = -\frac{1}{2}$ stac. točka

$f''(x) = 12 > 0$ pa u točki $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}))$ funkcija f ima strogi lokalni MINIMUM.

Zad Odredite intervale konveksnosti, konkavnosti i točke infleksije funkcije

$$f(x) = \ln(1+x^2).$$

Rj Uvijek najprije treba odrediti domenu.

Zbog uvjeta na domenu logaritma mora biti

$1+x^2>0$ a to je zadovoljeno $\forall x \in \mathbb{R}$

(zbog $x^2 \geq 0$ pa je $1+x^2 \geq 1 > 0$) tj. $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2\cdot(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

uvijek >0

$f''(x)>0$

$2-2x^2>0 \quad /:2$

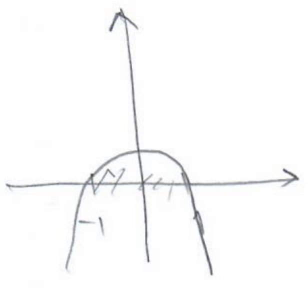
$1-x^2>0$

nultočke $1-x^2=(1-x)(1+x)=0$

$x_1 = 1$

$x_2 = -1$

$a=-1$



na intervalu $(-1,1)$ je funkcija strogo konveksna

$f''(x)<0$

$2-2x^2<0$

$1-x^2<0$ → "čitamo" rješenje s prethodnog grafa:

na intervalu $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ je f strogo konkavna.

U točkama $(-1, f(-1))$ i $(1, f(1))$ f prelazi iz konkavnog u konveksno, odnosno iz konveksnog u konkavno područje pa su to točke infleksije.

Zad Primjenom l'Hospitalovog pravila izračunajte

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{2x^3}$$

Rj $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{2x^3} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{6x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-(-\sin x)}{12x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{12x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{12} = \underline{\underline{\dfrac{1}{12}}}$

Zadatak za DZ (koji je bio zadan prošli put, trebali ste ga do sada riješiti)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \left(1^\infty\right)$$

Rj $\quad y = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \;/\; \ln$ $\quad\rightarrow$ dakle, najprije "napadnemo" s logaritmom

$$\ln y = \ln \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$$

zatim zamijenimo ln i limes jer tek onda kada je ln ispred izraza $\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ možemo prema pravilima logaritma "spustiti" eksponent

$$\ln y = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(x \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right) = (\infty \cdot 0)$$

a to nije neodređeni oblik na koji možemo primijeniti L'H pravilo niti znamo koliko iznosi $\infty \cdot 0$, zato se i zove "neodređeni" oblik

$$= \lim_{x\to\infty}\left(x^1 \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^{-1}} \qquad \left[x^{-1} = \frac{1}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

Možemo derivirati i sa strane $\left(\frac{2}{x}\right)' = \left(2x^{-1}\right)' = 2\cdot(-1)x^{-2} = -2x^{-2}$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{x}} \cdot \frac{(-2\cancel{x^{-2}})}{(-\cancel{x^{-2}})} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\cancel{\frac{2}{x}}_{\to 0}} = \underline{\underline{2}}$$

tj. $\ln y = 2 \rightarrow \log_e y = 2 \Rightarrow y = e^2$ Rj

ODREĐENI INTEGRAL

Ponovimo osnovno što ste naučili kada ste prošli kroz predavanje:

Neka je funkcija $f: I \to \mathbb{R}$ omeđena na segmentu $I = [a,b]$ tj. neka $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ tako da

$$m \leq f(x) \leq M \quad , \forall x \in [a,b]$$

i neka je $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ bilo koja SUBDIVIZIJA (PARTICIJA) segmenta $[a,b]$ (tj. P je konačan skup točaka $\{x_0, \dots, x_n\}$ za koje je

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b).$$

* Najčešće promatramo EKVIDISTANTNU SUBDIVIZIJU $P_n = \{x_0 \dots x_n\}$ a to je subdivizija definirana s

$$\underbrace{x_i = a + i \cdot h}, \quad \underbrace{h = \frac{b-a}{n}}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

tj. se točke su jednako udaljene, primijetite da su sve susjedne točke međusobno udaljene za h ($x_0 = a + 0 \cdot h = a$,

$$x_1 = a + 1 \cdot h = x_0 + h$$
$$x_2 = a + 2 \cdot h = (a + h) + h = x_1 + h \text{ itd})$$

a h smo dobili tako da smo naš segment $[a,b]$ podijelili na n jednakih dijelova (tj. duljina segmenta $[a,b]$, što je $b-a$ podijeljena s n)

Određeni integral funkcije f na segmentu $[a,b]$ bit će definiran pomoću sljedećih suma funkcije f vezanih uz subdiviziju P:

1) * DONJA DARBOUXOVA SUMA $s(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$

gdje je $m_i=\inf\{f(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}$

2) * GORNJA DARBOUXOVA SUMA $S(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$,

gdje je $M_i=\sup\{f(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}$.

* Podsjetite se infimuma i supremuma iz Matematike1

"DARBOUXOVA" čitamo "DARBUOVA"

3) INTEGRALNA SUMA

$$\sigma(f,P,\{\xi_1,\dots,\xi_n\})=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),$$

Vrijedi $m(b-a)\le s(f,P)\le\sigma(f,P,\{\xi_1,\dots,\xi_n\})\le S(f,P)\le M(b-a)$

(vidi str. 236 u udžbeniku)

Također, broj $I_*(f,[a,b])=\sup\{s(f,P): P\in\mathcal{P}\}$

tj. supremum svih donjih Darbouxovih suma, pri čemu je $\mathcal{P}$ skup svih subdivizija segmenta $[a,b]$ nazivamo DONJI RIEMANNOV INTEGRAL, a broj

$$I^*(f,[a,b])=\inf\{S(f,P): P\in\mathcal{P}\}$$

tj. infimum svih gornjih Darbouxovih suma nazivamo GORNJI RIEMANNOV INTEGRAL funkcije f na segmentu $[a,b]$.

→ Detalje pogledati u udžbeniku.

zad Neka je funkcija $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ definirana s ⑧ $f(x)=x+2$. Definirajte ekvidistantnu subdiviziju, odredite donju i gornju Darbouxovu sumu.

Rj Rješenje ovog zadatka pogledajte kada detaljno prođete kroz primjer 7.2 iz udžbenika na str. 236.

Ekvidistantna subdivizija

$P_n=\{x_0,\dots,x_n\}$ segmenta $[0,2]$ $\quad$ $[a,b]=[0,2]$ $(a=0,\ b=2)$

$$\boxed{x_i=a+ih},\quad h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n}$$

$(*)$

$$\Rightarrow\quad x_i=0+i\cdot\frac{2}{n}=\frac{2}{n}\cdot i$$

jer je množenje komutativno

Naša funkcija f je neprekidna i strogo rastuća na $[0,2]$, zato je

iskoristimo def. od f

$$m_i=\inf\{f(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}=f(x_{i-1})=x_{i-1}+2$$

"najmanju vrijednost ima u "najmanjoj" točki" jer je f rastuća

$$M_i=\sup\{f(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}=f(x_i)=x_i+2$$

Sada možemo naći odgovarajuće Darbouxove sume (za to nam je bilo potrebno najprije odrediti m_i i M_i).

Donja D. suma $\quad s(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})=$ (uvrstimo m_i i primijetimo da je $x_i-x_{i-1}=h$ jer je h udaljenost bilo koje dvije susjedne točke)

* P_n je definirana ekvidistantna subdivizija (vidi iznad)

$$\underline{\underline{\Delta(f, P_n)}} = \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1}+2)\cdot\frac{2}{n}$$

9

Iz (*) na prethodnoj str. uočite da je

$x_{\underline{\underline{i}}} = a + \underline{\underline{i}}h$ pa je $x_{\underline{\underline{i-1}}} = a + (\underline{\underline{i-1}})\cdot h$

$$= 0 + (i-1)\cdot\frac{2}{n} = (i-1)\cdot\frac{2}{n}$$

uvrstimo to u

$$= \sum_{i=1}^{n}\left((i-1)\cdot\frac{2}{n}+2\right)\cdot\frac{2}{n} \underset{\text{izmnožim}}{=} \sum_{i=1}^{n}\left((i-1)\cdot\frac{4}{n^2}+\frac{4}{n}\right)$$

$$\underset{\text{rastavimo na 2 sume}}{=} \sum_{i=1}^{n}(i-1)\frac{4}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{4}{n}$$

primjetite da oni ne ovise o indeksu sumacije pa ih možemo "izlučiti" ispred suma

$$= \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) + \frac{4}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}1}_{=n}$$

jer ovdje imamo sumu n jedinica tj. $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ puta}} = \underline{\underline{n}}$

$$= \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) + \frac{4}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n} = \frac{4}{n^2}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(i-1)}_{\text{ovo ću posebno izračunati}} + 4 \quad (\cancel{**})$$

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1) \underset{\text{razdvojim na 2 sume}}{=} \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1$$

suma n jedinica $= n$

suma prvih n prirodnih brojeva a to znamo (iz Mat1) da je $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Sada je

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n+1)-2n}{2} = \frac{n^2+n-2n}{2}$$

$$= \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

kada to uvrstimo u (**) dobivamo

$$\underline{\underline{s(f, P_n)}} = \frac{\cancel{4}^{2}}{n^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{2}} + 4 = \underline{\underline{\frac{2(n-1)}{n} + 4}}$$

Gornja D. suma

$$\underline{\underline{S(f, P_n)}} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{M_i}_{\text{uvrstim}} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=h} = \sum_{i=1}^{n} (x_i+2) \cdot h =$$

(*) $x_i = a + i \cdot h$
$= 0 + i \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n} i$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n} \cdot i + 2\right) \cdot \frac{2}{n}$$

ne ovise o indeksu i

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{pomnožimo}}}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4}{n^2} \cdot i + \frac{4}{n}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rastavimo na 2 sume}}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{n^2} \cdot i + \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{n}$$

$$= \frac{4}{n^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{=\frac{n(n+1)}{2}} + \frac{4}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{=n} = \frac{\cancel{4}^{2}}{n^{\cancel{2}}} \frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}} + \frac{4}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2(n+1)}{n} + 4}}$$