Matematika 2, vježbe (6.5. 2020.)

* Ponavljanje za kolokvij *

Riješit ću (slučajnim odabirom) 2. kolokvij iz akademske 2012./2013. s malom modifikacijom zadatka 2d) s obzirom na tipove zadataka kakve smo mi radili. Bilo bi dobro da svaki od sljedećih zadataka najprije riješite sami, a onda pogledate moje rješenje.

Zad2 Izračunajte integrale

a) $$\int \frac{(x-3)(x+1)}{4\sqrt{x^3}}\,dx = \int \frac{x^2+x-3x-3}{4\,x^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{x^2-2x-3}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

izmnožim u brojniku

izlučim konstantu

$$=\frac{1}{4}\int x^{-\frac{3}{2}}(x^2-2x^1-3)\,dx = \frac{1}{4}\int\left(x^{\frac{1}{2}}-2\cdot x^{-\frac{1}{2}}-3\cdot x^{-\frac{3}{2}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(\int x^{\frac{1}{2}}dx-2\cdot\int x^{-\frac{1}{2}}dx-3\cdot\int x^{-\frac{3}{2}}dx\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-3\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right)+c$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2\cdot 2x^{\frac{1}{2}}+3\cdot\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\right)+c$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-4\sqrt{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)+c$$

b) $$\int\left(2^x\cdot 6^{-x}+\frac{2}{x}\right)dx = \int\left(\frac{2^x}{6^x}+\frac{2}{x}\right)dx$$

$$=\int\left(\left(\frac{2}{6}\right)^x+\frac{2}{x}\right)dx = \int\left(\frac{2}{6}\right)^x dx+\int\frac{2}{x}\,dx$$

$$\frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$=\frac{\left(\frac{2}{6}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{6}\right)}+2\ln|x|+c$$

c) $\int_0^{\pi/2} (3e^x + \cos x + 5)\,dx = 3\int_0^{\pi/2} e^x\,dx + \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx + 5\int_0^{\pi/2} \underbrace{x^0}_{=1}\,dx$ (2)

$= 3 \cdot e^x \Big|_0^{\pi/2} + \sin x \Big|_0^{\pi/2} + 5 \cdot x \Big|_0^{\pi/2}$

$= 3 \cdot (e^{\pi/2} - \underbrace{e^0}_{=1}) + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} - \underbrace{\sin 0}_{=0} + 5 \cdot \frac{\pi}{2} - 5 \cdot 0$

$= 3e^{\pi/2} - 3 + 1 + \frac{5\pi}{2} = 3e^{\pi/2} - 2 + \frac{5\pi}{2}$

(nemojte na kalkulator računati približnu vrijednost nego ostavite u ovom obliku, ili u ovom

$\Rightarrow$ bitno je kada računate ODREĐENI INTEGRAL da UVRSTITE GRANICE kako bi dobili sve bodove

d) $\int \frac{-8x+12}{x^2-3x+2}\,dx =$

derivacija je $2x-3$, pogledamo što imamo u brojniku te vidimo da je $-8x+12 = -4 \cdot (2x-3)$

derivacija nazivnika

$= -4 \int \underbrace{\frac{2x-3}{x^2-3x+2}}_{=\frac{f'(x)}{f(x)}}\,dx = -4 \ln|x^2-3x+2| + c$

Zad3 Metodom supstitucije izračunajte integrale:

a) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{5x}\,dx = \left| \begin{array}{l} 2+\ln x = t \\ \frac{1}{x}\,dx = dt \;/\cdot x \\ dx = x \cdot dt \end{array} \right|$

$= \int \frac{\sqrt{t}}{5\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\,dt = \int \frac{\sqrt{t}}{5}\,dt = \frac{1}{5}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{5}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{15}(2+\ln x)^{3/2} + c$

b) $\int \frac{x^2+1}{(4x^3+12x)^7}\,dx = \left| \begin{array}{l} 4x^3+12x = t \\ (12x^2+12)\,dx = dt \\ 12(x^2+1)\,dx = dt \quad /:12(x^2+1) \\ dx = \frac{dt}{12(x^2+1)} \end{array} \right|$

$= \int \frac{\cancel{x^2+1}}{t^7}\,\frac{dt}{12(\cancel{x^2+1})} = \int \frac{1}{t^7}\,\frac{dt}{12} = \frac{1}{12}\int t^{-7}\,dt$

$-7+1=-6$

$= \frac{1}{12}\,\frac{t^{-6}}{(-6)} + C = -\frac{1}{72}\,t^{-6} + C = -\frac{1}{72}(4x^3+12x)^{-6} + C$

Zad5 Metodom parcijalne integracije izračunajte integrale:

a) $\int (x+1)\sin x\,dx = \left| \begin{array}{ll} x+1 = u & dv = \sin x\,dx \\ dx = du & v = -\cos x \end{array} \right|$

$= (x+1)(-\cos x) - \int(-\cos x)\,dx = -(x+1)\cos x + \int \cos x\,dx$

$= -(x+1)\cos x + \sin x + C$

b) $\int 3x^2 e^x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = 3x^2 & dv = e^x\,dx \\ du = 6x\,dx & v = e^x \end{array} \right|$

ili smo mogli trojku izlučiti ispred integrala i onda bi bilo $u = x^2$

$= 3x^2\cdot e^x - \int e^x\cdot 6x\,dx = 3x^2\cdot e^x - 6\underbrace{\int xe^x\,dx}_{(*)}$

(*) $\int xe^x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right| = x\cdot e^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$

uvrstimo u

konačno rješenje (koje obavezno treba napisati na kolokviju kako bi dobili sve bodove) je:

$3x^2\cdot e^x - 6\cdot(xe^x - e^x) + C$

zad6 Odredite površinu lika omeđenog parabolom (4)
$y = x^2 + 2x - 3$ i pravcem $y = -2x - 3$.

Rj To je isto kao da piše: odredite površinu lika omeđenog grafovima funkcija $f(x) = x^2 + 2x - 3$ i $g(x) = -2x - 3$ pa ćemo s tim oznakama i rješavati dalje.

Kako vidimo da nam nisu zadani dodatni pravci koji određuju granice integracije, moramo sami odrediti granice integracije tj. tražimo sjecišta funkcija f i g:

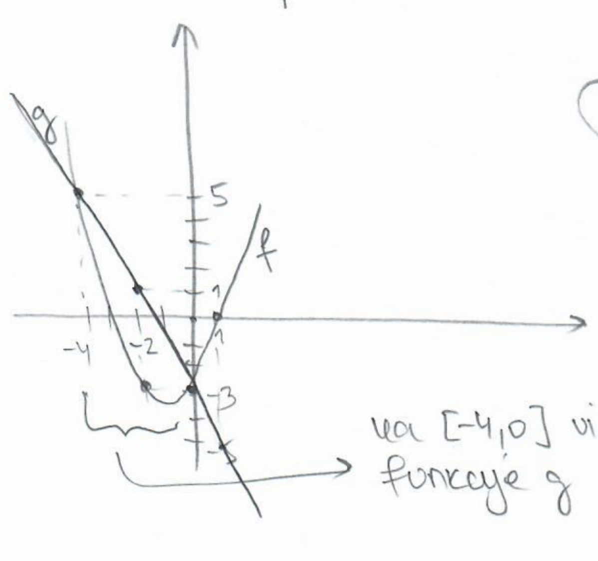
$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 + 2x - 3 = -2x - 3$$
$$x^2 + 2x - \cancel{3} + 2x + \cancel{3} = 0$$
$$x^2 + 4x = 0$$
$$x(x+4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -4$$

← granice integracije

Zatim, moramo skicirati funkcije da vidimo njihov položaj kako bi mogli postaviti integral (skica će se posebno bodovati u kolokviju)

x	−4	−2	0	1
f(x)	5	−3	−3	0

x	−4	−2	0	1
g(x)	5	1	−3	−5



$$P = \int_{-4}^{0} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-4}^{0} (-2x - 3 - (x^2 + 2x - 3))\,dx$$
$$= \int_{-4}^{0} (-2x - \cancel{3} - x^2 - 2x + \cancel{3})\,dx$$
$$= \int_{-4}^{0} (-x^2 - 4x)\,dx$$

granice slažemo od manje prema većoj

na $[-4, 0]$ vidimo da je graf funkcije g iznad grafa funkcije f pa je

$$\Rightarrow \int_{-4}^{0} (-x^2-4x)\,dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_{-4}^{0} - \frac{\cancel{4}^{2}x^2}{\cancel{2}}\Big|_{-4}^{0}$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Big|_{-4}^{0} - 2x^2\Big|_{-4}^{0} = -\frac{0^3}{3} + \frac{(-4)^3}{3} - 2\cdot 0^2 + 2\cdot(-4)^2$$

$$= -\frac{64}{3} + 2\cdot 16 = \frac{64}{3} + 32 = \frac{-64+3\cdot 32}{3} = \frac{-64+96}{3} = \frac{32}{3}$$

LINEARNA ALGEBRA

(3. kolokvij)

Vektori

Već ste se prošli tjedan na predavanju upoznali s vektorima. Kako ćemo sljedeći put početi raditi s matricama primijetit ćete da će nam se tada često spominjati pojam vektora, a pogotovo pojam linearne kombinacije (pri čemu ćemo se dotaknuti i linearne zavisnosti / nezavisnosti) te ću se na današnjim vježbama osvrnuti na to, uz kratko ponavljanje gradiva s predavanja.

* USMJERENA DUŽINA $\overrightarrow{PQ}$

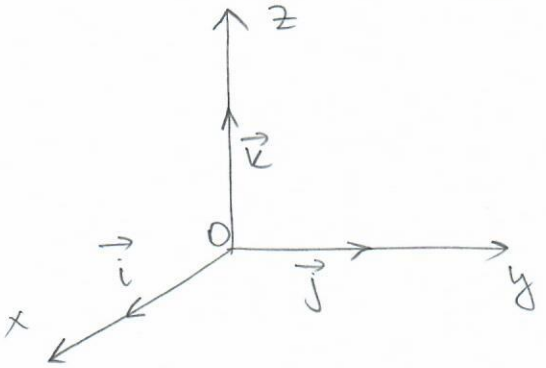
* vektor je klasa ekvivalencije svih USMJERENIH dužina ekvivalentnih sa proizvoljnom usmjerenom dužinom $\overrightarrow{PQ}$ (usmjerene dužine $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{P'Q'}$ su ekvivalentne ako postoji translacija koja točku P prevodi u P' i istovremeno točku Q u Q').

* DULJINU (normu, iznos) vektora $\vec{a} = [\overrightarrow{PQ}]$ označavamo s a ili $|\overrightarrow{PQ}|$ i definiramo kao duljinu dužine $\overline{PQ}$. (vidi udžbenik, str. 185)

* NUL-VEKTOR $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$ (vektor norme 0)

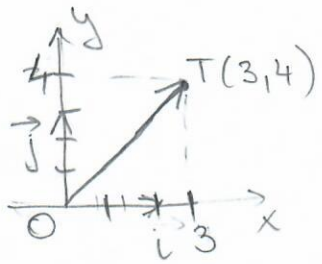
* JEDINIČNI VEKTOR : vektor norme (duljine) 1

* Jedinični vektori koji imaju smjer pozitivnog smjera pravokutnih koordinatnih osi x, y, z redom se označavaju s $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$



* Vektore u ravnini i prostoru možemo prikazivati u koordinatnom sustavu:

upr. $\mathbb{R}^2$



$\overrightarrow{OT} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

općenito $\overrightarrow{OT} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \vec{j}$

Primjer Zadani su vektori $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ i $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$.

Izračunajte:

a) $\vec{a} + \vec{b} = (\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) + (2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k})$

$= (1+2)\vec{i} + (1-1)\vec{j} + (3+5)\vec{k} = 3\vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 8\vec{k} = 3\vec{i} + 8\vec{k}$

b) $3\vec{a} - \vec{b} = 3(\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) - (2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k})$

$= 3\vec{i} + 3\vec{j} + 9\vec{k} - 2\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$

$= \vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$

* LINEARNA KOMBINACIJA VEKTORA (udžbenik, str. 188)

Za zadane vektore $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}$ i skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vektor

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a_1} + \cdots + \lambda_n \vec{a_n}$$

nazivamo LINEARNA KOMBINACIJA vektora $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}$ s koeficijentima $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

Primjer Vektor $\vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$ prikažite kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = 2\vec{i}$ i $\vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$.

Rj $\vec{c}$ treba prikazati kao lin. komb. vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$

tj. $\vec{c} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b}$ (**) $\Rightarrow$ treba odrediti λ_1 i λ_2.

uvrstimo $\vec{c}$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u prethodnu jednakost

$$2\vec{i} + 6\vec{j} = \lambda_1 \cdot (2\vec{i}) + \lambda_2 (3\vec{i} + 3\vec{j})$$
$$= 2\lambda_1 \vec{i} + 3\lambda_2 \vec{i} + 3\lambda_2 \vec{j}$$
$$= (2\lambda_1 + 3\lambda_2)\vec{i} + 3\lambda_2 \vec{j}$$

"grupiramo" izraze koji sadrže jedinični vektor $\vec{i}$ te $\vec{j}$

*izjednačimo odgovarajuće koeficijente jer vrijedi jednakost:

uz $\vec{i}$: $2 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2$

uz $\vec{j}$: $6 = 3\lambda_2 \ /:3 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 2}$

uvrstimo u 1. jedn.

$2 = 2\lambda_1 + 3\cdot 2 = 2\lambda_1 + 6$

$\Rightarrow 2\lambda_1 = 2-6 = -4 \ /:2$

$\lambda_1 = -2$

Sada je iz (**)

$$\boxed{\vec{c} = -2\vec{a} + 2\vec{b}}$$

Def (udžbenik, str. 188) Za vektore $\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}$ kažemo da su LINEARNO ZAVISNI ako se barem jedan od njih može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora. U suprotnom, tj. ako se ni jedan od njih ne može prikazati kao linearna kombinacija preostalih, za te vektore kažemo da su LINEARNO NEZAVISNI.

Primjer a) Pokažite da su vektori

$\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j} - \vec{k}$ linearno nezavisni.

Rj. Treba pokazati da su $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ linearno nezavisni tj. da iz njihove linearne kombinacije

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{0}$$

slijedi da su svi skalari jednaki nula tj. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. To će značiti da se niti jedan od vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ne može prikazati kao linearna kombinacija preostalih.

Uvrstimo vektore $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$

$$\lambda_1(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) + \lambda_2(\vec{i} + 2\vec{k}) + \lambda_3(\vec{j} - \vec{k}) = \vec{0}$$

"grupiramo" koeficijente uz $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{i} + (-\lambda_1 + \lambda_3)\vec{j} + (\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3)\vec{k} = \vec{0}$$

$$= 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$$

Izjednačimo koeficijente:

uz $\vec{i}$: $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

uz $\vec{j}$: $-\lambda_1 + \lambda_3 = 0$

$+ \Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\lambda_3$

uz $\vec{k}$: $\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0$ uvrstimo

$\Rightarrow \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_2 = \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -3\lambda_2}$

uvrstimo npr. u 1. $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow -3\lambda_2 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow -2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -3\lambda_2 = -3 \cdot 0 = 0$

$\lambda_2 = -\lambda_3 \overset{\text{daje}}{\Rightarrow} \lambda_3 = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lin. nez.

b) Vektor $\vec{d} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ prikažite kao lin. komb. vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ (zadani u a))

Rj Kao u prošlom primjeru, $\vec{d}$ treba prik. kao lin. komb. vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ (tako smo $\vec{c}$ prikazivali kao lin. komb. $\vec{a}$ i $\vec{b}$) pa je

$$\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$$

=) uvrstimo vektore $\vec{d}, \vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$

$$\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} = \lambda_1(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) + \lambda_2(\vec{i} + 2\vec{k}) + \lambda_3(\vec{j} - \vec{k})$$

$$\Rightarrow \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{i} + (-\lambda_1 + \lambda_3)\vec{j} + (\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3)\vec{k}$$

* izjednačimo odgovarajuće koeficijente

uz $\vec{i}$: $1 = \lambda_1 + \lambda_2$

uz $\vec{j}$: $2 = -\lambda_1 + \lambda_3$

(+) $\lambda_2 + \lambda_3 = 3 \Rightarrow \lambda_2 - 3 = -\lambda_3$

uz $\vec{k}$: $3 = \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3$ ← uvrstimo

$$3 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_2 - 3 = \lambda_1 + 3\lambda_2 - 3$$

$$\Rightarrow \lambda_1 + 3\lambda_2 = 6 \Rightarrow \lambda_1 = 6 - 3\lambda_2$$

uvrstim upr. u $1 = \lambda_1 + \lambda_2$

$$\Rightarrow 1 = 6 - 3\lambda_2 + \lambda_2$$

$$\Rightarrow -5 = -2\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{5}{2}$$

$$\lambda_1 = 6 - 3\cdot\frac{5}{2} = 6 - \frac{15}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$\lambda_3 = 3 - \lambda_2 = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Sada je } \vec{d} = -\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}}$$