Matematika 2,
zadnje vježbe
3.6.2020.

Determinante - nastavak

<u>zad</u> Izračunajte determinante sljedećih matrica trećeg reda:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

<u>Rj</u> $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) \cdot 9 = -36$

* Ako je dana trokutasta matrica, onda je njena determinanta jednaka umnošku elemenata na GLAVNOJ DIJAGONALI

b) $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

<u>Rj</u> $\det B = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-1) \cdot 8 = 40$

* Ako dva stupca ili dva retka determinante zamijene mjesta DETERMINANTA MIJENJA PREDZNAK

c) $C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

<u>Rj</u> $\det C = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0$

* Ako matrica ima dva ista stupca ili dva ista retka, onda je njena determinanta JEDNAKA NULA

* I u kolokviju često bude da se izračuna determinanta isključivo koristeći svojstva determinante

d) $D = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$

ima 2 ista stupca, pa vrijedi prethodno pravilo

Rj $\det D = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 3 & 6 & 12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$

* Determinanta se množi skalarom tako da se samo jedan stupac ili samo jedan redak pomnoži tim skalarom tj. zajednički faktor svih elemenata nekog stupca ili nekog retka može se izlučiti ispred determinante

e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 14 \\ 6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

Rj $\det E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 14 \\ 6 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0$

* Ako determinanta ima barem jedan stupac pun nula ili barem jedan redak pun nula onda je ona jednaka NULA

f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

Rj $\det F = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$

prvi drugi treći

* Ako je neki stupac (ili neki redak) determinante linearna kombinacija preostalih stupaca (redaka) te determinante, onda je determinanta jednaka nuli

primjetimo da je treći stupac = 1. stupac + 2. stupac

* Ostala pravila mogu se proučiti u udžbeniku, u naznačenim stranicama zadnjeg predavanja

* Laplaceov razvoj determinante
(udžbenik, str. 244)

* Determinanta se može razviti po bilo kojem retku ili stupcu. O tome nam govori Laplaceov razvoj determinante. Najbolje je za "razvijanje" odabrati redak ili stupac koji ima najviše nula, no po bilo kojem retku ili stupcu da razvijate uvijek trebate dobiti isto rješenje.

Zad Laplaceovim razvojem izračunajte determinante sljedećih matrica:

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Rj $\det A = \begin{vmatrix} 4^{+} & 8^{-} & -3^{+} \\ 0^{-} & 0^{+} & 5^{-} \\ 0^{+} & -1^{-} & 2^{+} \end{vmatrix} = \underbrace{-0 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}_{=0} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

odabrat ću 2. red jer ima "najviše" nula, a mogla sam iz istog razloga, kao što vidite, odabrati i 1. stupac

$= -5 \cdot (4 \cdot (-1) - 0 \cdot 8)$

$= -5 \cdot (-4) = \underline{\underline{20}}$

najprije dodjelimo "predznake" koje ćemo primijeniti samo kod "izvlačenja" pojedinog skalara u razvoju ovako dodajemo:

$\begin{vmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{vmatrix}$

na mjestu (3,1) u matrici pa zato 3+1

b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Rj $\det B = \begin{vmatrix} 4^{+} & 0^{-} & 0^{+} \\ 5 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot 5) = 4 \cdot (-1) = \underline{\underline{-4}}$

CRAMEROVO PRAVILO

Ovo pravilo služi za rješavanje tzv. kvadratnih sustava, tj. sustava kod kojih je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica. Neka je zadan sustav od n jednadžbi sa n nepoznanica:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \qquad (*)$$

Sada je $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ ← determinanta matrice sustava

Nadalje, neka je $D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $i = 1, \dots, n$

determinanta koja se dobiva iz determinante D zamjenom $\boxed{\text{i-tog stupca}}$ stupcem slobodnih koeficijenata tj. vektorom "desne strane sustava"

Rješenja dobivamo kao: $\boxed{x_i = \frac{D_i}{D}, \ i = 1 \dots n}$

- Također vrijedi: a) ako je $D = 0$, da bi sustav (*) bio rješiv mora biti $D_1 = D_2 = \dots = D_n = 0$

  b) sustav (*) ima JEDINSTVENO RJEŠENJE onda i samo onda ako je $D \neq 0$ i u tom slučaju je rj. dano sa

Zad Cramerovim pravilom riješite sljedeće sustave:

a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 5x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 0 . \end{aligned}$$

Rj

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 0 + 2 - 5 = \underline{\underline{2}} \neq 0$$

pa ima jedinstveno rj.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 10 - 6 = \underline{\underline{4}}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 + 2 - 3 = \underline{\underline{2}}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = 6 - 10 = \underline{\underline{-4}}$$

Rješenje: $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{4}{2} = 2$

$x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{2}{2} = 1$

$x_3 = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{-4}{2} = -2$

Rj: $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, -2)$

Provjera $x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$

$2 + 2 \cdot 1 + (-2) = 2$

$\underline{\underline{2 = 2}}$ ✓

b) $x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$

$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 2$

Rj $D = \begin{vmatrix} 1^+ & 4^- & 3^+ \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$

$= 3\cdot 3 - 7 - 4\cdot(2\cdot 3 - 2) + 3\cdot(2\cdot 7 - 2\cdot 3)$

$= 9 - 7 - 4\cdot 4 + 3\cdot 8 = 10 \neq 0$ jedinstveno rj.

$D_1 = \begin{vmatrix} 2^+ & 4^- & 3^+ \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = +2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$

$= 2\cdot(3\cdot 3 - 7\cdot 1) - 4(3\cdot 3 - 2\cdot 1) + 3\cdot(3\cdot 7 - 2\cdot 3) = 21$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1^+ & 2^- & 3^+ \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

$= 3\cdot 3 - 2\cdot 1 - 2\cdot(2\cdot 3 - 2\cdot 1) + 3\cdot(2\cdot 2 - 2\cdot 3) = \underline{\underline{-7}}$

$D_3 = \begin{vmatrix} 1^+ & 4^- & 2^+ \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$

$= 3\cdot 2 - 7\cdot 3 - 4\cdot(2\cdot 2 - 2\cdot 3) + 2\cdot(2\cdot 7 - 2\cdot 3) = \underline{\underline{9}}$

Rj. $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{21}{10}$, $x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{7}{10}$, $x_3 = \frac{9}{10}$

Rj je $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{21}{10}, \frac{-7}{10}, \frac{9}{10}\right)$

Provjera $x_1 + 4x_2 + 3\cdot x_3 = 2$

$\frac{21}{10} + 4\cdot\frac{(-7)}{10} + 3\cdot\frac{9}{10} = 2$

$\frac{20}{10} = 2$

$2 = 2$ ✓

c) $2x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 2$

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$

$7x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$

Rj $D = \begin{vmatrix} 2^+ & 6^- & -4^+ \\ 1 & 2 & -3 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2\cdot(2\cdot1 - 2\cdot(-3)) - 6\,(1\cdot1 - 7\cdot(-3)) - 4\cdot(1\cdot2 - 7\cdot2) = \underline{\underline{-68}}$

$D_1 = \begin{vmatrix} 2^+ & 6^- & -4^+ \\ 1^- & 2^+ & -3^- \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= -1\cdot(6\cdot1 - 2\cdot(-4)) + 2\cdot(2\cdot1 - 3\cdot(-4)) + 3\cdot(2\cdot2 - 3\cdot6) = \underline{\underline{-28}}$

$D_2 = \begin{vmatrix} 2^+ & 2^- & -4^+ \\ 1 & 1 & -3 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = +2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$

$= 2\cdot(1\cdot1 - 3\cdot(-3)) - 2\cdot(1\cdot1 - 7\cdot(-3)) - 4\cdot(1\cdot3 - 7\cdot1) = \underline{\underline{-8}}$

$D_3 = \begin{vmatrix} 2^+ & 6^- & 2^+ \\ 1 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2\cdot(2\cdot3 - 2\cdot1) - 6\cdot(1\cdot3 - 7\cdot1) + 2\cdot(1\cdot2 - 7\cdot2) = \underline{\underline{8}}$

Rješenja su: $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-28}{-68} = \frac{7}{17}$

$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-8}{-68} = \frac{2}{17}$

$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{8}{-68} = -\frac{2}{17}$

Rj $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{7}{17}, \frac{2}{17}, \frac{-2}{17}\right)$

Provjera: $2x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 2$

$2\cdot\frac{7}{17} + 6\cdot\frac{2}{17} - 4\cdot\frac{(-2)}{17} = 2$

$\frac{34}{17} = 2$

$\underline{\underline{2 = 2}}$ ✓

d) $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 14$

$x_1 \qquad + 2x_3 = 0$

$x_1 - x_2 - 5x_3 = 4$

Rj $D = \begin{vmatrix} 2^+ & 3^- & -1^+ \\ 1^- & 0^+ & 2^- \\ 1^+ & -1^- & -5^+ \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= -3 \cdot (1 \cdot (-5) - 1 \cdot 2) + 1 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)) = \underline{\underline{26}}$

$D_1 = \begin{vmatrix} 14^+ & 3^- & -1^+ \\ 0^- & 0^+ & 2^- \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (14 \cdot (-1) - 4 \cdot 3) = \underline{\underline{52}}$

$D_2 = \begin{vmatrix} 2^+ & 14^- & -1^+ \\ 1^- & 0^+ & 2^- \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 14 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$

$= -1\,(14 \cdot (-5) - 4 \cdot (-1)) - 2\,(2 \cdot 4 - 1 \cdot 14) = \underline{\underline{78}}$

$D_3 = \begin{vmatrix} 2^+ & 3^- & 14^+ \\ 1^- & 0^+ & 0^- \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 3 & 14 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (3 \cdot 4 - (-1) \cdot 14) = \underline{\underline{-26}}$

Rješenja su: $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{52}{26} = 2$

$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{78}{26} = 3$

$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-26}{26} = -1$

Rj $(x_1, x_2, x_3) = (2, 3, -1)$

Provjera $2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 = 14$

$2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - (-1) = 14$

$4 + 9 + 1 = 14$

$14 = 14$ ✓

Komentar: Za vježbu možete sve sustave koje smo rješavali Gaussovom metodom eliminacije riješiti Cramerovim pravilom i obratno.