Pismeni ispit iz kolegija
Matematika 1
01.07.2009.

1. **[20 bod.]** Metodom matematičke indukcije dokažite da za $x \neq -1$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \cdots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

2. **[20 bod.]** Zadan je kompleksan broj

$$z = \frac{(2+4i)(1+3i)}{1-i^{2007}} + 5i^{201}.$$

Odredite z^5.

3. **[20 bod.]** Odredite domenu funkcije

$$f(x) = \ln\left(1 - \frac{1-\ln x}{1+\ln x}\right) - \sqrt{\frac{x}{(x^3-3x+3x-1)(1-e^x)}}.$$

4. **[20 bod.]** Zadane su funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) := \frac{x^2-2x-3}{x-3}, \quad g(x) := x-1.$$

Odredite kompozicije $f \circ g$, $\quad g \circ f$, ispitajte gdje su te kompozicije neprekidne, te skicirajte grafove funkcija f i g.

5. **[20 bod.]** Izračunajte derivaciju funkcije f zadane formulom

$$f(x) = x \cdot \left(3b^2 \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{b-x}} - (3b+2x)\sqrt{bx-x^2}\right).$$

Dragana Jankov